Jeudi 18 Juin 2009 16h30 — 17h30 Clermont-Ferrand ①

Luc Menichi

Cohomologie de Hochschild
et topologie des cordes

Bibliographie

mon article Batalin-Vilkovisky algebra structure on Hochschild cohomology
+ les références

Plan

I Cohomologie de Hochschild

II Conjecture cohomologie de Hochschild Topologie des cordes

III démo sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

IV sur un corps commutatif quelconque $\mathbb{F}$?

Je vais travailler donc à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{F}$ de caractéristique quelconque

I Cohomologie de Hochschild

Soit A une algèbre (graduée différentielle)
Soit M un A-bimodule

def Cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M

$$HH^*(A, M) = \mathrm{Ext}_{A \otimes A^{op}}(A, M)$$

Explicitement,

soit $\varepsilon_A : \mathcal{B}(A, A, A) \xrightarrow{\simeq} A$

la (double) bar resolution

$HH^*(A, M)$ est l'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_{A \otimes A^{op}}(\mathcal{B}(A,A,A), M)$

th (Gerstenhaber)

$HH^*(A, A)$ algèbre de Gerstenhaber

def Une algèbre de Gerstenhaber est une algèbre graduée commutative A equippé d'un crochet de Lie

$\{\ ,\ \} : A_i \otimes A_j \longrightarrow A_{i+j+1}$ de degré $+1$

tq

$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{(|a|+1)b} b\{a, c\}$

relation de Poisson

Proposition Felix - M - Thomas ou Keller

Soit $f : A \xrightarrow{\simeq} B$ un quasi-iso d'algèbres

alors f induit un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber

$HH^*(A, A) \cong HH^*(B; B)$

II Conjecture cohomologie de Hochschild - Topologie des cordes

Soit M une variété lisse fermée simplement connexe de dimension d

Chas et Sullivan ont défini sur l'homologie singulière des lacets libres sur M, $H_*(\mathcal{L}M)$ un produit de degré $-d$ similaire au produit d'intersection

$$H_p(\mathcal{L}M) \otimes H_q(\mathcal{L}M) \longrightarrow H_{p+q-d}(\mathcal{L}M)$$

Soit $s : M \hookrightarrow \mathcal{L}M$ l'inclusion des lacets constants dans $\mathcal{L}M$

$H_d(s)([M]) \in H_d(\mathcal{L}M)$ est l'unité de ce produit

- action du cercle S^1 sur $\mathcal{L}M$ $\quad S^1 \times \mathcal{L}M \longrightarrow \mathcal{L}M$

d'où en homologie, une action de

$H_*(S^1) = E[S^1]$ sur $H_*(\mathcal{L}M)$

$$H_*(S^1) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}M)$$

Notons par Δa l'image de $[S^1] \otimes a$ par cette action

on a $\Delta^2 a = [S^1]^2 . a = 0$

th (Chas - Sullivan)

$H_{*+d}(\mathcal{L}M)$ equipé de ce produit et de Δ

est une BV - algèbre

def Une BV - algèbre est une algèbre de Gerstenhaber A equippe d'un operateur $\Delta : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ de degre $+1$ tq $\Delta \circ \Delta = 0$

et le crochet de Lie est donné par

$$\{a, b\} = (-1)^{|a|}\left(\Delta(ab) - (\Delta a)b - (-1)^{|a|} a \Delta b\right)$$

Conjecture (Chas-Sullivan ou Cohen-Jones)

$\exists$ iso d'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(S^*(M), S^*(M)) \cong H_{*+d}(\mathcal{L}M)$

démontré sur un corps de caractéristique 0 par
- Felix - Thomas - (Vigué)
- Xiajun Chen

sur un corps quelconque, Cohen et Jones prétendent avoir un iso d'algèbre

Stratégie

(1) définir une BV-algèbre sur $HH^*(S^*(M), S^*(M))$ qui étend la structure d'algèbre de Gerstenhaber

(2) démontrer un iso d'algèbre commutant avec les opérateurs Δ

Je vais insister sur (1)

III Démo sur les rationnels

thm (implicit dans Tradler, explicite dans M)

redemontré par beaucoup de personnes Kontsevich - Soibelman

Soit A une algèbre tq $\theta : A \cong A^\vee$ comme A-bimodule

(on dit que A est une algèbre symétrique de Frobenius).

Soit Δ tq

$$\begin{tikzcd} HH^*(A,A) \arrow[r, "HH^*(A,\theta)"] \arrow[d, dashed, "\Delta"'] & HH^*(A,A^\vee) \arrow[d, "B^\vee \text{ duale du bord de Connes}"] \\ HH^{*-1}(A,A) \arrow[r, "HH^*"] & HH^{*-1}(A,A^\vee) \end{tikzcd}$$

Alors l'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(A,A)$ équipée de Δ est une BV-algèbre

Exemples 1) $A = H^*(M;\mathbb{F})$,

Par dualité de Poincaré $H^*(M) \cong H_*(M) = H^*(M)^\vee$

iso de $H^*(M)$-modules donc de $H^*(M)$-bimodules

car $H^*(M)$ est commutatif.

2) d'après Lambrecht - Stanley,

$\exists$ toujours une algèbre symétrique de Frobenius A

et des quasi-isos d'algèbres commutatives

$$A \xleftarrow{\simeq} \mathcal{B} \xrightarrow{\simeq} \Lambda_{DR}(M)$$

th Felix - Thomas

Soit A une tel algèbre

$$H_*(LM;\mathbb{R}) \underset{\text{BV-algèbre}}{\cong} HH^*(A,A) \underset{\text{alg de Gerstenhaber}}{\cong} HH^*(A_{DR}(M), A_{DR}(M))$$

d'après Proposition du I

Par exemple si on peut prendre $A = H^*(M;\mathbb{R})$
c à d si M est $\mathbb{R}$-formel

$$H_*(LM;\mathbb{R}) \underset{\text{BV-algèbre}}{\cong} HH^*(H^*(M;\mathbb{R}), H^*(M;\mathbb{R}))$$

En caractéristique 2, ce n'est pas aussi ~~[illegible]~~ simple de calculer la BV-algèbre $H_*(\mathcal{L}M)$ quand M est formel

En effet th (M) généralisé par Chataur - Leborgne

$$H_*(LS^2_{L\mathbb{C}P^{2n+1}};\mathbb{F}_2) \underset{\text{BV-algèbre}}{\not\cong} HH^*(H^*(S^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}};\mathbb{F}_2), H^*(S^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}};\mathbb{F}_2))$$

pourtant la sphère $S^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}}$ est $\mathbb{F}_2$-formel !

rem : Ces deux BV-algèbres sont néanmoins isomorphes comme algèbre de Gerstenhaber.

IV Sur un corps quelconque

Th (Felix - Thomas - Vigué)

Il existe un iso d'evs

$$HH^*(S^*(M), S^*(M)) \xleftarrow[D]{\cong} HH^{*-d}(S^*(M), S^*(M)^\vee) \xleftarrow[\text{Jones}]{\cong} H_{*+d}(LM)$$

Th (M)

~~Soit [illegible]~~

L'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(S^*(M), S^*(M))$
équippé de l'opérateur $\Delta = D \circ B^\vee \circ D^{-1}$
est une BV-algèbre.

Remarque $D \circ \text{Jones} \circ \Delta = D \circ B^\vee \circ \text{Jones} = \underbrace{D \circ B^\vee \circ D^{-1}}_{\text{par def} = \Delta} \circ D \circ \text{Jones}$

donc $D \circ$ Jones commute avec les opérateurs Δ
de la BV-algèbre de Chas-Sullivan sur $H_*(LM)$
et de la BV-algèbre que j'ai mise sur $HH^*(S^*(M), S^*(M))$

donc si on démontre que $D \circ$ Jones est un
morphisme d'algèbres
alors $D \circ$ Jones est un morphisme de BV-algèbres
donc la conjecture est démontrée !

Lemme (M) mélange de – Felix - Thomas - Vigué
– Ginzburg

Soit A une algèbre gradué différentielle

Soit $[m]$ une classe $\in HH^{-d}(A, A^\vee)$

Soit $\eta : k \longrightarrow A$ l'unité de l'algèbre

On a une application

$$HH^*(\eta, A^\vee) : HH^*(A, A^\vee) \longrightarrow HH^*(k, A^\vee) = H(A^\vee)$$
$$[m] \longmapsto HH^*(\eta, A^\vee)([m])$$

Supposons que a) le morphisme de $H(A)$ – modules à gauche

$$H(A) \xrightarrow{\cong} H(A^\vee)$$
$$a \longmapsto a \, . \, HH^{-d}(\eta, A^\vee)([m])$$

soit un isomorphisme.

et supposons que b) $B^\vee([m]) = 0$

alors 1) Il existe un iso d'evo

$$HH^*(A, A) \underset{\mathcal{D}}{\xleftarrow{\cong}} HH^*(A, A^\vee)$$

2) L'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(A, A)$ équipé de l'operateur $\Delta = \mathcal{D} \circ B^\circ \circ \mathcal{D}^{-1}$ est une BV - algèbre

Preuve du Lemme

Soit $\varepsilon_A : B(A,A,A) \xrightarrow{\simeq} A$

la bar resolution de A

La classe $[m] \in HH^{-d}(A, A^\vee) = H\, Hom_{A\otimes A^{op}}(B(A,A,A), A^\vee)$

est représenté par

un morphisme de A-bimodules de degré $-d$

commuttant avec les différentielles $m : B(A,A,A) \longrightarrow A^\vee$

on montre que a) veut dire exactement

que m est un quasi-iso

On a donc obtenu une suite de quasi-iso

de A-bimodules

$$A \xleftarrow[\varepsilon_A]{\simeq} B(A,A,A) \xrightarrow[m]{\simeq} A^\vee$$

c à d $A \simeq A^\vee$ dans la catégorie dérivée des

A-bimodules

en appliquant la cohomologie de Hochschild $HH^*(A, -)$

on obtient donc un isomorphisme $\mathcal{D}$

$$HH^*(A,A) \xleftarrow[\mathcal{D}]{\simeq} HH^{*-d}(A, A^\vee)$$

on montre qu'on a une structure BV

ssi $B^\vee([m]) = 0$.

Preuve des 2 thms

on veut montrer que $A = S^*(M)$ vérifie les hypothèses du Lemme.

Soit $ev : \mathcal{L}M \longrightarrow M$, $l \longmapsto l(0)$ l'application d'évaluation

unité du produit de Chas-Sullivan

$$\begin{tikzcd}
H_d(s)[M] & H_*(\mathcal{L}M) \arrow[rr, "\cong", "\text{Jones}"'] \arrow[dr, "H_*(ev)"] & & HH^*(S^*(M), S^*(M)^\vee) \arrow[dl, "HH^*(s, S^*(M)^\vee)"] \\
& & H_*(M) \arrow[ul, bend left, "H_*(s)"] \arrow[u, phantom, "G"] & \\
& [M] & &
\end{tikzcd}$$

Prenons $[m] = \text{Jones} \circ H_d(s)[M]$

$$HH^*(s, S^*(M)^\vee)[m] = H_d(ev) \circ H_d(s)[M] = [M]$$

car s est une section de ev

donc a) est vérifié

$s : M \longrightarrow \mathcal{L}M$ est S^1-équivariant avec l'action triviale sur M

donc $B^\vee(m) = B^\vee \circ \text{Jones} \circ H_*(s)[M]$

$= \text{Jones} \circ \Delta \circ H_*(s)([M]) = 0$

donc b) est vérifié. □