# Résumé du mémoire d'HDR

## De la triangulation $p$-adique à la théorie des modèles des algèbres de Heyting, et *vice-versa*

DARNIÈRE Luck

Les travaux présentés dans ce mémoire s'étendent dans plusieurs directions, qu'on peut regrouper en deux domaines principaux.

## 1 Géométrie $p$-adique

1. *Simplexes discrets et $p$-adiques.* J'ai introduit une notion de polytope et de simplexe discret, sous-ensembles de $\mathbb{Z}^m$ définis par des inégalités linéaires d'un type très restrictif, dont les faces sont formées par leurs points à l'infini. J'ai montré que tout polytope discret pouvait se décomposer en complexe simplicial, en respectant certaines contraintes de formes. Cet outil flexible de « découpage monotopique » est l'analogue pour les polytopes discrets de la subdivision barycentrique des polytopes réels. Les polytopes et simplexes $p$-adiques sont construits à partir de la pré-image de leurs homologues discrets *via* la valuation, intersectée avec certains sous-groupes de $(\mathbb{Q}_p^\times)^m$ d'indices finis. Ils héritent des bonnes propriétés des polytopes discrets, notamment le découpage monotopique, qui permettent de les décomposer en « complexes simpliciaux $p$-adiques » et jouent un rôle clé dans le point suivant.
2. *Triangulation $p$-adique.* Je montre que tout ensemble semi-algébrique $p$-adique est semi-algébriquement homéomorphe à un « complexe simplicial $p$-adique » (au sens du point précédent). Cet analogue $p$-adique de la triangulation réelle apporte un éclairage nouveau sur la géométrie des ensembles semi-algébriques : il donne en particulier une variante de la décomposition cellulaire de Denef, apportant un contrôle inédit sur la façon dont les différentes parties d'une telle décomposition se touchent. Ce contrôle n'est pas aussi poussé que celui donné par les stratifications Cluckers, Comte et Loeser (2012). En revanche les cellules impliquées dans ce découpage ont une description bien plus précise et explicite que les strates, et l'homéomorphisme avec un complexe simplicial les ramène à une structure encore bien plus simple : celle des simplexes discrets. On obtient en application des résultats inédits de découpage et de recollement, de relèvement semi-algébrique des fonctions continues du corps vers le groupe des valeurs, et l'existence générale de rétractions semi-algébriques.
3. *P-minimalité et variantes.* On sait depuis peu que la décomposition cellulaire de Denef ne se généralise pas à tous les corps P-minimaux. Au contraire la décomposition t-cellulaire que nous avons construite avec P. Cubides Kovacsics et E. Leenknegt, s'applique à tous les ensembles P-minimaux. Elle permet entre autres de montrer que toute application P-minimale est continue par morceaux (comme le sont les applications o-minimales), ce qui répond à une question de Haskell et MacPerson (1997).

   La $p$-optimalité, que j'ai introduite séparément, est une autre variante $p$-adique de la o-minimalité. Elle est un peu plus restrictive que la P-minimalité mais reste assez générale pour englober tous les exemples non pathologiques (notamment les structures semi-algébrique et sous-analytique). Avec I. Halupczok, nous montrons que la décomposition cellulaire de Denef, le théorème de préparation pour les fonctions semi-algébriques et la classification à bijection semi-algébrique près des ensembles semi-algébriques, déjà étendus par Cluckers (2004) aux sous-analytiques, se généralisent aux fonctions et ensembles $p$-optimaux.

## 2 Treillis topologiques et anneaux

1. *Anneaux de fonctions définissables continues.* Soit $\mathscr{K}$ une structure enrichissant un corps ordonné $(K,\leq)$ ou valué $(K,v)$. Pour tout ensemble définissable $X\subseteq K^n$, soit $\mathscr{C}(X)$ l'anneau des fonctions définissables continues de $X$ dans $K$. Sous des hypothèses extrêmement générales sur la structure $\mathscr{K}$ et la géométrie de $X$, en particulier quand $\mathscr{K}$ est o-minimale, P-minimale ou que $K$ est un corps local, je montre avec M. Tressl que l'anneau $\mathbb{Z}$ est interprétable, voire définissable dans $\mathscr{C}(X)$. En application nous obtenons par exemple que même si $K$ est une extension élémentaire (stricte) de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$, le plongement naturel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p^n)$) dans $\mathscr{C}(K^n)$ *n'est pas* un plongement élémentaire si $n\geq 2$ (resp. $n\geq 1$).
2. *Treillis échelonnés.* Le treillis résiduel de l'anneau $\mathscr{C}(X)$ est le plus souvent isomorphe au treillis $L(X)$ des parties définissables fermées dans $X$. C'est un exemple typique de treillis $n$-échelonné, pour $n=\dim X$. Sa théorie complète est connue pour être indécidable dans le cas réel ou algébriquement clos, dès que $\dim X\geq 2$. J'ai montré, entre autres choses, que la théorie des treillis $n$-échelonnés atomiques avait cependant une modèle-complétion $T_n$. En outre $T_n$ est localement finie, ce qui permet de classer facilement ses modèles à équivalence élémentaire près. L'axiomatisation de $T_n$ repose principalement sur une propriété de découpage des fermés. Or la triangulation $p$-adique montre que si $K$ est $p$-adiquement clos, ce découpage est possible pour les fermés semi-algébriques dans $K^n$. Dans ce cas $L(K^n)$ est donc un modèle de $T_n$, ce qui permet de montrer que sa théorie complète est décidable, contrairement au cas réel clos. Je montre en particulier que la théorie complète de $L(K^n)$ ne dépend que de $n$, pas du corps $p$-adiquement clos $K$ considéré, ni même (!) du nombre premier $p$.
3. *Algèbres co-Heyting.* Tous les travaux de cette partie sont en commun avec M. Junker.

   Nous dégageons d'abord une notion de dimension et de co-dimension pour les éléments d'une algèbre co-Heyting $L$, directement inspirées de celles de la géométrie *via* la dualité de Stone. Nous montrons comment la co-dimension permet de définir une pseudo-métrique sur $L$, dont nous étudions la complétion $\widehat{L}$ (au sens usuel, des suites de Cauchy). Nous montrons par exemple que toute suite monotone et bornée dans $\widehat{L}$ est convergente, et que $\widehat{L}$ coïncide avec la limite projective des quotients de $L$ de dimension finie. Dans le cas où $L$ est pré-compacte, $\widehat{L}$ est aussi la complétion profinie de $L$. Enfin nous généralisons aux algèbres co-Heyting pré-compactes nombre de propriétés connues seulement pour les algèbres co-Heyting de présentation finie, en particulier celles concernant leurs éléments irréductibles.

   En parallèle, nous reprenons la construction de Bellissima (1986) sur l'algèbre co-Heyting libre à $n$ générateurs $\mathscr{F}_n$ pour en dégager quelques résultats nouveaux. En particulier nous montrons que $\mathscr{F}_n$ possède un unique $n$-uplet de générateurs, définissable dans $\mathscr{F}_n$, ce qui montre que son groupe d'automorphisme n'est autre que le groupe symétrique.

   Enfin, nous nous intéressons aux variétés d'algèbres co-Heyting admettant une modèle-complétion. On sait qu'il existe exactement huit. Pour les six d'entre elles qui sont localement finies nous redémontrons ce résultat par une méthode totalement différente, basée sur la théorie des modèles et sur une intuition géométrique inspirée des treillis échelonnés. Cette méthode fournit de ces modèle-complétions une compréhension plus intuitive, basée sur une axiomatisation finie qui leur faisait défaut jusque là. Le cas des deux dernières variétés a résisté plus longtemps, mais est finalement résolu dans un travail récent, non encore publié.