Croyance et preuve en mathématiques

Journée François Ducrot

Université d'Angers – Faculté des sciences

Mercredi 15 juin 2022

LES INDÉGIVRABLES | PAR XAVIER GORCE

I – Vrai ou faux ?

Six critères de véracité

$$2 + 2 = \quad ?$$

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✓ C'est une évidence.
- ✓ C'est universel.
- C'est dans les livres.
- C'est confirmé par l'expérience.
- Ce n'est pas réfutable.
- C'est prouvé

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

✓ C'est une évidence.

✓ C'est universel.

✓ C'est dans les livres.

C'est confirmé par l'expérience.

Ce n'est pas réfutable.

C'est prouvé

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✓ C'est une évidence.
- ✓ C'est universel.
- ✓ C'est dans les livres.
- ✓ C'est confirmé par l'expérience.
- Ce n'est pas réfutable.
- C'est prouvé

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

✓ C'est une évidence.

✓ C'est universel.

✓ C'est dans les livres.

✓ C'est confirmé par l'expérience.

✓ Ce n'est pas réfutable.

C'est prouvé

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✓ C'est une évidence.
- ✓ C'est universel.
- ✓ C'est dans les livres.
- ✓ C'est confirmé par l'expérience.
- ✓ Ce n'est pas réfutable.
- ✓ C'est prouvé.

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✓ C'est une évidence.
- ✓ C'est universel.
- ✓ C'est dans les livres.
- ✓ C'est confirmé par l'expérience.
- ✓ Ce n'est pas réfutable.
- ✓ C'est prouvé.

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✗ C'est une évidence.
- ✗ C'est universel.
- ✗ C'est dans les livres.
- ✓ C'est confirmé par l'expérience.
- ✓ Ce n'est pas réfutable.
- ✓ C'est prouvé.

Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4$$

- ✗ C'est une évidence.
- ✗ C'est universel.
- ✗ C'est dans les livres.
- ✗ C'est confirmé par l'expérience.
- ✓ Ce n'est pas réfutable.
- ✓ C'est prouvé.

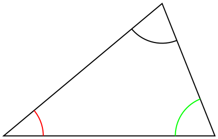
Six critères de véracité

$$2 + 2 = 4\,?$$

- ✗ C'est une évidence.
- ✗ C'est universel.
- ✗ C'est dans les livres.
- ✗ C'est confirmé par l'expérience.
- ✗ Ce n'est pas réfutable.
- ➥ C'est prouvé ?

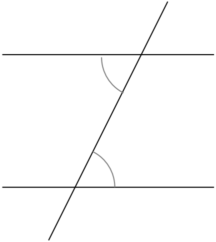
II – La méthode axiomatique

Premières preuves : réduction à l'évidence

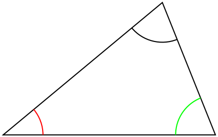


Somme des angles $= 180^\circ$?

Premières preuves : réduction à l'évidence

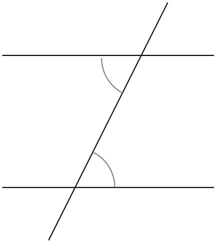


Angles égaux

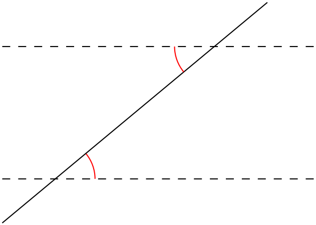


Somme des angles $= 180^\circ$?

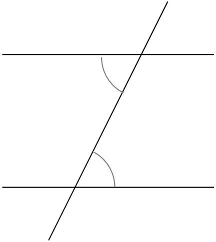
Premières preuves : réduction à l'évidence



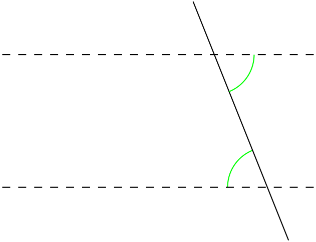
Angles égaux



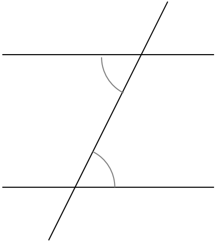
Premières preuves : réduction à l'évidence



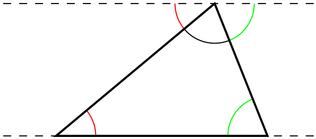
Angles égaux



Premières preuves : réduction à l'évidence

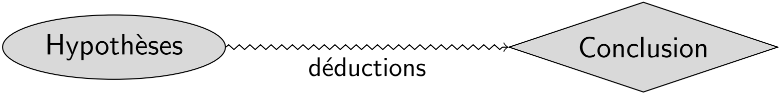


Angles égaux

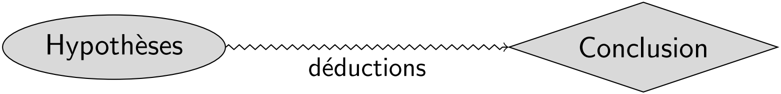


Somme des angles $= 180^\circ$

Preuve mathématique



Preuve mathématique



Point de départ d'une théorie = Axiomes

Règles de déduction = Logique

Axiomes de la géométrie ($\simeq$ 300 av. JC)

Euclide

1. Par deux points quelconques on peut faire passer une droite.

Axiomes de la géométrie ($\simeq$ 300 av. JC)

Euclide

1. Par deux points quelconques on peut faire passer une droite.
2. Tout segment peut se prolonger indéfiniment (en une droite).

Axiomes de la géométrie ($\simeq$ 300 av. JC)

Euclide

1. Par deux points quelconques on peut faire passer une droite.
2. Tout segment peut se prolonger indéfiniment (en une droite).
3. Un point et un rayon quelconques déterminent un cercle.

Axiomes de la géométrie ($\simeq$ 300 av. JC)

Euclide

1. Par deux points quelconques on peut faire passer une droite.
2. Tout segment peut se prolonger indéfiniment (en une droite).
3. Un point et un rayon quelconques déterminent un cercle.
4. Tous les angles droits sont congruents.

Axiomes de la géométrie ($\simeq$ 300 av. JC)

Euclide

1. Par deux points quelconques on peut faire passer une droite.
2. Tout segment peut se prolonger indéfiniment (en une droite).
3. Un point et un rayon quelconques déterminent un cercle.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Étant donnés une droite $\mathcal{D}$ et un point $P \notin \mathcal{D}$, il existe une unique droite passant par P et parallèle à $\mathcal{D}$.

Axiomes de l'arithmétique (1889)

Peano

1. 0 n'a pas de prédécesseur.
2. Tout entier naturel a un unique successeur.
3. Deux entiers différents ont des successeurs différents.
4. Si une partie X contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments alors $X = \mathbb{N}$.

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

-

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "s"] & \bullet \end{tikzcd}$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$\bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet$$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$\bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$\bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet \xrightarrow{s} \bullet \quad \cdots$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n),$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition

$$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1)\ldots$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \ldots \; n + s(k) = s(n + k).$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \ldots \ n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0,$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \dots \; n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n,$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1)\ldots \; n + s(k) = s(n + k).$

$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n\ldots$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \ldots\ n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n \ldots\ n \cdot s(k) = n \cdot k + n.$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \ldots \; n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n \ldots \; n \cdot s(k) = n \cdot k + n.$

Puis on calcule :

$$2 + 2 =$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \dots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1) \dots \; n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n \dots \; n \cdot s(k) = n \cdot k + n.$

Puis on calcule :

$$2 + 2 = s(2 + 1)$$

La preuve attendue…

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n + 1)\ldots\ n + s(k) = s(n + k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n\ldots\ n \cdot s(k) = n \cdot k + n.$

Puis on calcule :

$$2 + 2 = s(2 + 1) = s(s(2))$$

La preuve attendue. . .

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n + 0 = n, \quad n + 1 = s(n), \quad n + 2 = s(n+1)\ldots \; n + s(k) = s(n+k).$
$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot 1 = n, \quad n \cdot 2 = n \cdot 1 + n\ldots \; n \cdot s(k) = n \cdot k + n.$

Puis on calcule :

$$2 + 2 = s(2+1) = s(s(2)) = s(3)$$

La preuve attendue...

Dans l'arithmétique de Peano, on interpréte :

Les nombres

$$0 \xrightarrow{s} 1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \quad \cdots$$

L'addition et la multiplication

$n+0=n, \quad n+1=s(n), \quad n+2=s(n+1)\dots \; n+s(k)=s(n+k).$
$n\cdot 0=0, \quad n\cdot 1=n, \quad n\cdot 2=n\cdot 1+n\dots \; n\cdot s(k)=n\cdot k+n.$

Puis on calcule :

$$2+2=s(2+1)=s(s(2))=s(3)=4 \quad \checkmark$$

Axiomes ZFC de la théorie des ensembles (1880 - 1920)

Cantor Frege Russell Zermelo Fraenkel Skolem

1. Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.
2. Si E et F sont des ensembles alors $E \times F$ est un ensemble.
3. Si E est un ensemble alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble.

$$\vdots$$

Remarque

La collection de tous les ensembles *n'est pas* un ensemble.

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « successeur » de } E$$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « successeur » de } E$$

Exemple

Si $E = \{a, b\}$ alors $s(E) = \{a, b, E\} = \{a, b, \{a, b\}\}$.

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « successeur » de } E$$

Exemple

$0 := \emptyset$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « } \text{successeur} \text{ » de } E$$

Exemple

$0 := \emptyset$

$1 := s(0) = \left\{\emptyset\right\}$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « \textcolor{red}{successeur} » de } E$$

Exemple

$$0 := \emptyset$$

$$1 := s(0) = \Big\{\emptyset\Big\}$$

$$2 := s(1) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « \textcolor{red}{successeur} » de } E$$

Exemple

$$0 := \emptyset$$

$$1 := s(0) = \Big\{\emptyset\Big\}$$

$$2 := s(1) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$$

$$3 := s(2) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « successeur » de } E$$

Exemple

$$0 := \emptyset$$

$$1 := s(0) = \Big\{\emptyset\Big\}$$

$$2 := s(1) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$$

$$3 := s(2) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \ldots$$

Des ensembles aux nombres

$$s(E) := E \cup \{E\} = \text{ le « \textcolor{red}{successeur} » de } E$$

Exemple

$$0 := \emptyset$$
$$1 := s(0) = \Big\{\emptyset\Big\}$$
$$2 := s(1) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\}$$
$$3 := s(2) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \ldots$$

En résumé

À partir des ensembles, avec ZF on peut reconstruire $\mathbb{N}$.

Des nombres à tout le reste

Avec ZF on peut reconstruire $(\mathbb{N}, s, 0)$ (donc aussi $(\mathbb{N}, +, \times)$).
$\Rightarrow$ Dans ZF on peut « interpréter » l'arithmétique de Peano.

Des nombres à tout le reste

Avec ZF on peut reconstruire $(\mathbb{N}, s, 0)$ (donc aussi $(\mathbb{N}, +, \times)$).
$\Rightarrow$ Dans ZF on peut « interpréter » l'arithmétique de Peano.

À partir de $(\mathbb{N}, +, \times)$, avec ZFC on sait reconstruire $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Dans ZFC on peut interpréter l'analyse.

Des nombres à tout le reste

Avec ZF on peut reconstruire $(\mathbb{N}, s, 0)$ (donc aussi $(\mathbb{N}, +, \times)$).
$\Rightarrow$ Dans ZF on peut « interpréter » l'arithmétique de Peano.

À partir de $(\mathbb{N}, +, \times)$, avec ZFC on sait reconstruire $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Dans ZFC on peut interpréter l'analyse.

À partir de $\mathbb{R}$, avec ZF on construit $\mathbb{R}^2$ (le plan), $\mathbb{R}^3$ (l'espace)...
$\Rightarrow$ Dans ZFC on peut interpréter la géométrie.

Des nombres à tout le reste

Avec ZF on peut reconstruire $(\mathbb{N}, s, 0)$ (donc aussi $(\mathbb{N}, +, \times)$).
$\Rightarrow$ Dans ZF on peut « interpréter » l'arithmétique de Peano.

À partir de $(\mathbb{N}, +, \times)$, avec ZFC on sait reconstruire $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Dans ZFC on peut interpréter l'analyse.

À partir de $\mathbb{R}$, avec ZF on construit $\mathbb{R}^2$ (le plan), $\mathbb{R}^3$ (l'espace)...
$\Rightarrow$ Dans ZFC on peut interpréter la géométrie.

Plus généralement

Dans ZFC, de proche en proche, on interprète toutes les mathématiques !

Règles de déduction (logique classique)

$$\frac{A \text{ et } B}{A} \qquad \frac{A}{A \text{ ou } B}$$

$$\frac{(A \Rightarrow B) \text{ et } A}{B} \qquad \frac{(A \Rightarrow B) \text{ et } (\text{non } B)}{\text{non } A}$$

$$\frac{}{A \text{ ou } (\text{non } A)}$$

$$\vdots$$

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

- ✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.
- ✓ Universalité (objectivité) du calcul.

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

- ✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.
- ✓ Universalité (objectivité) du calcul.
- ✓ Assentiment de tous les experts $\rightsquigarrow$ école.

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

- ✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.
- ✓ Universalité (objectivité) du calcul.
- ✓ Assentiment de tous les experts $\rightsquigarrow$ école.
- ✓ Confirmée par l'expérience (ou bien le monde est fou !).

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

- ✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.
- ✓ Universalité (objectivité) du calcul.
- ✓ Assentiment de tous les experts $\rightsquigarrow$ école.
- ✓ Confirmée par l'expérience (ou bien le monde est fou !).
- ✓ Non réfutable.

Avantages de la preuve

Toute preuve se ramène à un calcul formel sur les propositions.

- ✓ Évidence des axiomes et des règles logiques.
- ✓ Universalité (objectivité) du calcul.
- ✓ Assentiment de tous les experts $\rightsquigarrow$ école.
- ✓ Confirmée par l'expérience (ou bien le monde est fou !).
- ✗ Non réfutable ?

III – Limites de la preuve

Preuve exacte ou preuve compréhensible ?

Ax. 1. $P(\varphi) \wedge \Box\, \forall x[\varphi(x) \to \psi(x)] \to P(\psi)$
Ax. 2. $P(\neg\varphi) \iff \neg P(\varphi)$
Th. 1. $P(\varphi) \to \Diamond\, \exists x\ [\varphi(x)]$
Df. 1. $G(x) \iff \forall\varphi[P(\varphi) \to \varphi(x)]$
Ax. 3. $P(G)$
Th. 2. $\Diamond\, \exists x\ G(x)$
Df. 2. $\varphi \text{ ess } x \iff \varphi(x) \wedge \forall\psi\{\psi(x) \to \Box\, \forall y[\varphi(y) \to \psi(y)]\}$
Ax. 4. $P(\varphi) \to \Box\ P(\varphi)$
Th. 3. $G(x) \to G \text{ ess } x$
Df. 3. $E(x) \iff \forall\varphi[\varphi \text{ ess } x \to \Box\, \exists x\ \varphi(x)]$
Ax. 5. $P(E)$
Th. 4. $\Box\, \exists x\ G(x)$

Les preuves sont-elles irréfutables ?

En 1879, Frege énonce que toute théorie mathématique T devrait avoir les trois propriétés suivantes, pour tout énoncé A :

- Cohérence
  Si A est démontrable dans T alors (non A) ne l'est pas.
- Complétude
  Si A est vrai alors A est démontrable dans T.
- Décidabilité
  Il existe un algorithme qui dit si A est démontrable ou non dans T.

Les preuves sont-elles irréfutables ?

En 1879, Frege énonce que toute théorie mathématique T devrait avoir les trois propriétés suivantes, pour tout énoncé A :

- Cohérence
  Si A est démontrable dans T alors (non A) ne l'est pas.
- Complétude
  Si A est vrai alors A est démontrable dans T.
- Décidabilité
  Il existe un algorithme qui dit si A est démontrable ou non dans T.

Programme de Hilbert (1900 - 1930)
Démontrer que les mathématiques (la théorie des ensembles) sont cohérentes et complètes, voire décidables.

« *Wir müssen wissen, wir werden wissen.* »

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple

$\mathcal{P}(x)$: $\exists y_1, y_2 \in x,\ y_1 \neq y_2$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \iff x$ contient au moins deux éléments.

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple

$\mathcal{P}(x)$: $\exists y_1, y_2 \in x,\ y_1 \neq y_2$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \iff x$ contient au moins deux éléments.

Exemple

$\mathcal{P}(x)$: $\forall y,\ y \in x \Rightarrow y \notin \mathbb{N}$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \iff x$ ne contient aucun entier naturel.

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple (Russell, 1902)

$\mathcal{P}(x)$: $x \notin x$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ n'appartient pas à lui-même.
$x \notin E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ appartient à lui-même.

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple (Russell, 1902)

$\mathcal{P}(x)$: $x \notin x$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ n'appartient pas à lui-même.
$x \notin E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ appartient à lui-même.
Si $E_{\mathcal{P}} \in E_{\mathcal{P}}$ alors $E_{\mathcal{P}} \notin E_{\mathcal{P}}$.

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple (Russell, 1902)

$\mathcal{P}(x)$: $x \notin x$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ n'appartient pas à lui-même.
$x \notin E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ appartient à lui-même.
Si $E_{\mathcal{P}} \in E_{\mathcal{P}}$ alors $E_{\mathcal{P}} \notin E_{\mathcal{P}}$.
Si $E_{\mathcal{P}} \notin E_{\mathcal{P}}$ alors $E_{\mathcal{P}} \in E_{\mathcal{P}}$.

Le paradoxe de Russell

Dans la théorie des ensembles de Frege, un axiome dit que si une propriété $\mathcal{P}(x)$ peut s'énoncer par une formule mathématique, alors la collection des ensembles x qui ont cette propriété forme un ensemble $E_{\mathcal{P}}$.

Exemple (Russell, 1902)

$\mathcal{P}(x)$: $x \notin x$.
$x \in E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ n'appartient pas à lui-même.
$x \notin E_{\mathcal{P}} \Rightarrow x$ appartient à lui-même.
Si $E_{\mathcal{P}} \in E_{\mathcal{P}}$ alors $E_{\mathcal{P}} \notin E_{\mathcal{P}}$.
Si $E_{\mathcal{P}} \notin E_{\mathcal{P}}$ alors $E_{\mathcal{P}} \in E_{\mathcal{P}}$.

Conclusion : $E_{\mathcal{P}}$ n'est pas un ensemble.
Donc la théorie des ensembles de Frege n'est pas cohérente.

Note : C'est pour y remédier qu'on a introduit ZF.

Le théorème d'incomplétude (1931)

Gödel

Pour toute théorie T dans laquelle on peut interpréter l'arithmétique de Peano (comme par exemple ZFC) :

1. Si T est cohérente alors elle n'est pas complète.
2. Si T est cohérente alors la cohérence de ses axiomes ne peut être prouvée à l'intérieur même de T.

En particulier

On peut espérer que ZFC est cohérente, mais si c'est le cas on ne pourra jamais le prouver !

IV – Croyance en la preuve

Les « contradictions » en mathématiques

À plusieurs reprises au cours de l'histoire, la confiance en la cohérence des mathématiques a été ébranlée par des découvertes troublantes.

- L'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans l'antiquité.

Les « contradictions » en mathématiques

À plusieurs reprises au cours de l'histoire, la confiance en la cohérence des mathématiques a été ébranlée par des découvertes troublantes.

- L'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans l'antiquité.
- Les nombres complexes (« imaginaires » ou « impossibles ») introduits par Cartan au XVIe siècle.

Les « contradictions » en mathématiques

À plusieurs reprises au cours de l'histoire, la confiance en la cohérence des mathématiques a été ébranlée par des découvertes troublantes.

- L'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans l'antiquité.
- Les nombres complexes (« imaginaires » ou « impossibles ») introduits par Cartan au XVI^{e} siècle.
- Les infinitésimaux, à tout instant négligés comme nuls et pourtant non nuls (on peut diviser par un infinitésimal), sur lesquels Newton et Leibniz fondent l'analyse au XVIII^{e} siècle.

Les ≪ contradictions ≫ en mathématiques

À plusieurs reprises au cours de l'histoire, la confiance en la cohérence des mathématiques a été ébranlée par des découvertes troublantes.

- L'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans l'antiquité.
- Les nombres complexes (≪ imaginaires ≫ ou ≪ impossibles ≫) introduits par Cartan au XVIe siècle.
- Les infinitésimaux, à tout instant négligés comme nuls et pourtant non nuls (on peut diviser par un infinitésimal), sur lesquels Newton et Leibniz fondent l'analyse au XVIIIe siècle.
- *etc.*

Conclusion

Chacun de ces écueils a eu pour effet de stimuler la recherche et d'amener une avancée générale, constat résumé ainsi par le groupe Bourbaki :

> ≪ *Voilà 25 siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.* ≫

Références :

J.-P. Delahaye, ≪ *Raccourcis dans les démonstrations* ≫, sur internet.

J.-P. Delahaye, ≪ *Statut mathématique des contradictions* ≫, magazine Pour la science, n° 241, novembre 1997.