MINISTÈRE DE LA JEUNESSE, DE L'ÉDUCATION ET DE LA RECHERCHE

Direction des personnels enseignants

CAPES EXTERNE & CAFEP-CAPES DE MATHÉMATIQUES

Rapport de Monsieur Jean MOUSSA
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
Président du Jury

2003
CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouve réunis dans la brochure « enseigner dans les collèges et les lycées » diffusée par le ministère de l'éducation nationale. (D.P.E., 34 rue de Châteaudun, 75009 Paris). On peut se procurer cette brochure directement au ministère ou auprès des services communs universitaires d'information et d'orientation.

Les renseignements spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiés dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ETABLIS SOUS LA RESPONSABILITE DES PRESIDENTS DE JURY »

SOMMAIRE

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2003 page 4

1. Composition du jury page 4
2. Programme du concours page 7
3. Statistiques page 19
   3.1 Résultats globaux page 19
   3.2 Résultats par catégories page 20
   3.3 Résultats par académie page 22
   3.4 Répartition des notes page 24
4. Les épreuves écrites page 27
5. Les épreuves orales page 27
   5.1 Organisation page 27
   5.2 Conseils pratiques page 28
   5.3 L'évaluation des épreuves orales page 29
   5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné page 30
   5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier page 31
   5.6 Commentaires sur l'utilisation des calculatrices page 32

II. ENONCES ET ANALYSE DES EPREUVES ECRITES page 33

1. Enoncé de la 1° épreuve page 34
2. Analyse de la 1° épreuve page 42
3. Enoncé de la 2° épreuve page 46
4. Analyse de la 2° épreuve page 53

III. SUJETS ET ANALYSE DES EPREUVES ORALES page 55

1. Liste des exposés (première épreuve orale) page 56
2. Sujets de l'épreuve sur dossier (seconde épreuve orale) page 60
3. Analyse des épreuves orales page 65
   3.1 Commentaires sur la première épreuve page 65
   3.2 Commentaires sur la seconde épreuve page 68

IV. CONCLUSION page 69

V. ANNEXES page 70

1. Bibliothèque du CAPES page 70
   1.1. Programmes page 70
   1.2. Ouvrages de pédagogie page 70
   1.3. Manuels scolaires page 72
   1.4. Enseignement supérieur et ouvrages divers page 77
   1.5. Annales page 81
2. Calculatrices page 81
3. Exemples de dossiers pour la seconde épreuve orale page 82

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2003

1. Composition du jury.

Par arrêté en date du 14 février 2003, la composition du jury est la suivante:

	NOM	PRENOM	FONCTION	ACADEMIE
M.	ACX	Olivier	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
Mme	ADOBET	Céline	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
Mme	AEBISCHER	Anne-Marie	Professeur Agrégé	Besançon
M.	ALESSANDRONI	Philippe	IA-IPR	Nancy-Metz
Mme	AMIOT	Martine	IA-IPR	Créteil
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé	Dijon
Mme	ANTOINE	Marie	Maître de Conférences	Lille
M.	ARTIGUES	Jean-Paul	Professeur de Chaire Supérieure	Rouen
M.	AUBRY	Pierre-Jean	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
Mme	AUTHIER	Hélène	Maître de Conférences	Reims
M.	AYMES	Jean	IA-IPR	Toulouse
M.	BACHE	Jean	Professeur agrégé	Rennes
M.	BADRA	Abdallah	Maître de conférences	Clermont Ferrand
M.	BALZER	Paul	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	BARBOLOSI	Dominique	Maître de Conférences	Aix-Marseille
Mme	BARKATS	Frédérique	Professeur Agrégé	Nice
M.	BELLEBOUCHE	Daniel	Professeur Agrégé	Amiens
M.	BELLY	Daniel	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
M.	BELTRAMONE	Jean Paul	IA-IPR	Créteil
M.	BERGERON	Axel	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	BERTRAND-MATHIS	Anne	Professeur des Universités	Poitiers
M.	BILGOT	Jean François	IA-IPR	Clermont Ferrand
Mme	BLAU	Danielle	IA-IPR	Toulouse
M.	BLOUZA	Adel	Maître de Conférences	Rouen
M.	BODY	Bernard	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	BOGAERT	Yves	Professeur Agrégé	Paris
Mme	BONNEFONT	Claire	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	BORNAZ-VERT	Eliane	Professeur Agrégé	Paris
M.	BOUCHER	François	Professeur de Chaire Supérieure	Toulouse
Mme	BOUR	Marie-Claude	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	BOUSCASSE	Jean-Marie	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	BRISSET	Anne Marie	Professeur Agrégé	Paris
M.	CARLIER	Roland	Professeur Agrégé	Nantes
M.	CARPENTIER	Michel	Maître de Conférences	Paris
M.	CARRON	Christophe	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	CESARO	Joseph	IA-IPR	Nice
Mme	CHASSAING-KOWALSKA	Anna	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	CHEVALLIER	Jean-Marie	Assistant (vice-président)	Orléans-Tours
M.	CLAVILIER	André	Maître de Conférences	Clermont Ferrand
M.	CORI	René	Maître de Conférences (vice-président)	Paris

M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de Conférences	Nancy-Metz
M.	DANTZER	Jean-François	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	DECAUWERT	Monique	Maître de Conférences	Grenoble
Mme	DECHEZLEPRETRE	Nathalie	Professeur Agrégé	Créteil
M.	DELCOURT	Jean	Professeur Agrégé	Versailles
M.	DETILLEUX	Daniel	IA-IPR	Dijon
M.	DOYEN	Jacques	Maître de Conférences	Grenoble
Mme	DUFFAUD	Brigitte	Professeur Agrégé	Besançon
M.	DUGARDIN	Thierry	Professeur Agrégé	Créteil
M.	DULON	Laurent	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	DUMAS	Laurent	Maître de Conférences	Paris
Mme	DUPONCHEL	Domitille	Professeur Agrégé	Lille
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	Créteil
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	ESTRADE	Anne	Maître de Conférences	Orléans-Tours
M.	FERRAND	Patrick	IA-IPR	Lyon
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	Reims
Mme	FLICHE	Françoise	Professeur Agrégé	Rennes
Mme	FONTANEZ	Françoise	Professeur Agrégé	Paris
Mme	GAUTHERON	Véronique	Maître de Conférences	Paris
M.	GEOFFRIAU	François	Maître de Conférences	Poitiers
Mme	GERBERT-GAILLARD	Evelyne	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	GIRAULT	Dominique	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	GRAPPIN	Jean-Louis	Professeur Agrégé	Paris
Mme	GRELLIER	Sandrine	Maître de Conférences	Orléans-Tours
M.	GROISON	Jean Marc	Professeur Agrégé	Lyon
M.	GUGGER	Benoît	Professeur Agrégé	Clermont Ferrand
M.	GUYONVARCH	Bertrand	Professeur Agrégé	Rennes
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de Chaire Supérieure	Besançon
M.	HARINGTON	Bruno	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	HARTMANN	Andreas	Maître de conférences	Bordeaux
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	HENROT	Isabelle	Professeur Agrégé	Lille
M.	HEROULT	François	Professeur Agrégé	Paris
M.	HERVE	Loïc	Maître de Conférences	Rennes
Mme	JACOB	Chantal	IA-IPR	Paris
M.	JEDDI	Ahmed	Maître de conférences	Nancy-Metz
M.	JULIA	Gilbert	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	KERVADEC	Elisabeth	Professeur Agrégé	Rennes
M.	LABROSSE	Jean	Professeur Agrégé	Lyon
M.	LAHBABI	Mohamed	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	Amiens
Mme	LAZAR	Yvette	Professeur Agrégé	Rennes
M.	LE BARS	Michel	Professeur Agrégé	Paris
M.	LE BIGOT	Jean-Luc	Professeur Agrégé	Nantes
Mme	LE GOFF	Claire	Professeur Agrégé (vice-présidente)	Paris
M.	LEBLANC	Jean	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	LEHMAN	Eric	Professeur des Universités	Caen
M.	LEMAIRE	Bernard	Professeur Agrégé	Lille
M.	LETERRIER	Pierre	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	LETHIELLEUX	Claire	Professeur Agrégé	Paris
Mme	LIORIT	Karine	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	LUC	Hervé	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	LUCAS	Edouard	Professeur Agrégé	Paris
M.	MALKI	Saber	Professeur Agrégé	Nancy-Metz

Mme	MARBEAU	Jocelyne	Professeur Agrégé	Paris
M.	MARGIRIER	Jean-Paul	Professeur Agrégé	Lyon
M.	MARTEAU	Jean Luc	IA-IPR	Lille
M.	MATHERON	Etienne	Maître de Conférences	Bordeaux
Mme	MEGARD	Marie	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	MELLAC	Joseph	Professeur Agrégé	Défense
M.	MENEVIS	Hervé	Professeur Agrégé	Paris
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	Versailles
M.	MERIL	Alex	Professeur des Universités	Guadeloupe
Mme	MEULIEN	Christine	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	MEURISSE	Anne	Professeur Agrégé	Lille
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles
M.	MOHAN	Shalay	Professeur Agrégé	Paris
M.	MORIN	François	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	MOURGUES	Marie-Hélène	Maître de Conférences	Créteil
M.	MOURRET	Bernard	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	MOUSSA	Jean	IGEN (président)	
Mme	MOUSSA	Anne	Professeur Agrégé	Paris
Mme	MUHLRAD-GREIF	Catherine	Maître de Conférences	Paris
Mme	NOUVET	Michèle	Professeur Agrégé	Paris
M.	PAINTANDRE	Stéphan	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	PARISE	Laurent	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	PASSAT	Isabelle	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	PAWLOWSKI	Françoise	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	PERRUCA	Jannine	Professeur Agrégé	Paris
M.	PIEDNOIR	Jean Louis	IGEN	Paris
M.	PIRIOU	Laurent	Maître de Conférences	Nantes
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	QUAREZ	Ronan	Maître de conférences	Rennes
M.	QUIBEL	Yann	Professeur Agrégé	Créteil
M.	QUIBLIER	Philippe	Professeur de Chaire Supérieure	Grenoble
M.	RANDRIAMIHAMISON	Louis	Maître de Conférences	Toulouse
Mme	RASKINE	Anne	Professeur Agrégé	Créteil
M.	RAVEL	Jean-Christophe	Professeur Agrégé	Créteil
M.	REGNEAULT	Georges	Professeur Agrégé	Lille
M.	REVILLON	Georges	IA-IPR	Lyon
M.	ROMBALDI	Jean Etienne	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
Mme	ROUSSET-BERT	Suzette	IA-IPR	Strasbourg
M.	SALLAZ	Alain	Maître de Conférences	Grenoble
M.	SDIKA	Luc	Professeur Agrégé	Créteil
M.	SEIGNOURET	Jean-Louis	Professeur Agrégé	Versailles
M.	SIGWARD	Eric	IA-IPR	Lille
Mme	TANOH	Hélène	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	TENTI	Marc	Professeur Agrégé	Créteil
M.	THABARET	Jean Paul	IA-IPR (vice-président)	Grenoble
Mme	TRAD	Marie-Anne	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	VAN DER OORD	Eric	IGEN (vice-président)	
M.	VIAL	Jean-Pierre	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
Mme	VILLE	Françoise	Maître de Conférences	Paris
Mme	VOISIN	Annick	IA-IPR	Créteil
M.	WERQUIN	Philippe	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	WIRTH	Martine	Professeur de Chaire Supérieure	Paris

2. Programme du concours

Le programme de la session 2003 a été publié dans le B.O. n° 13 du 30 mai 2002. Le programme de la session 2002 a été reconduit sans modification. Le texte en vigueur est donc celui paru au B.O. n° 8 spécial du 24 mai 2001.

EPREUVES ECRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I

EPREUVES ORALES

Épreuve d'exposé
Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :

1.I. « Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique. »
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
1.III. « Rudiments de cardinalité. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.V.2. « Configurations », alinéas a) et c).
2.V.3. « Transformations ».
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d) et e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle ».
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions », alinéa a).
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

Épreuve sur dossier
Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES
Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOEN n° 42 du 25 Novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 Mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 1.2.1999 parue au BOEN n°6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une *calculatrice scientifique programmable,* alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir programmer une instruction d'affectation.

- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.

- Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.

- Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.

Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :

- la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable,
- le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int \ldots\ldots d\ldots$, $\sum$, $\mapsto$, $\{ \ldots \mid \ldots\ldots \}$; $\forall$; $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure…
Ensemble IN des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGEBRE ET GEOMETRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient.
Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bezout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

II. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bezout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs Irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de D'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $L(E,F)$, algèbre $L(E)$, groupe linéaire $GL(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels , somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de $\ker u$ dans E, u définit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} u$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E*. Orthogonal dans E* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. *Matrices*

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $L(K^q,K^p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $GL_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (\alpha_{ij})$, définie par les relations $\alpha_{jj} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauss ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, Im u et ker u sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux,

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal O(E), groupe des rotations (ou spécial orthogonal) SO(E).

Matrices orthogonales. Groupes O(n) et SO(n). Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orlhonormale directe.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal O(E).

b) Dans le plan euclidien orienté (n = 2) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur SO(2).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté (n = 3) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent SO(3).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes.

Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire U(E). Groupe U(n) des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\| AX-B \|^2$, où $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant

b) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

c) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme

canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \mapsto a\bar{z} + b$ et $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \operatorname{Arg}(z-a)$, $z \mapsto \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \operatorname{Arg}\dfrac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v)$, $u = o(v)$ ou $u << v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles ou complexes.*

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.
Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image

réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. L'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. **Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral**

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de Classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k ($k \geqslant 1$). Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une suite finie strictement

croissante $a_0 = a$, a_1, …, $a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i, a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)dt$; $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité. Si $a \leqslant b$, $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a,b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt .$$

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor-Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale.
Méthode du milieu (ou des tangentes).
Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor-Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $t \mapsto e^{at}$, où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.
c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de e^x, $\ln(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$, où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe. Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t).X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation

des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x'' = f(t,x,x')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variable et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).
b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes ($k \geqslant 1$).

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier ; tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée,

développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés

Expériences aléatoires . Evénements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé (Ω, A, P). Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible).

La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme.

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans IR^n. Evénements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires.

Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de IR n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x)=P[X\leq x]$.

Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type.

Variables centrées, variables réduites.

Variable aléatoire y = g(X) fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X.

Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans R^n) discrets. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^2. Lois marginales.

Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.

Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^n. Indépendance de n variables aléatoires réelles.

Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si X1,..., Xn sont indépendantes, toute fonction de (X1,..., Xp) est indépendante de toute fonction de (Xp+1,..., Xn). Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.

c) Variables aléatoires à densité

On dit qu'une variable aléatoires X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites.

Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que aX + b, X^2 , exp X...). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans IR^2. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité).

Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.

Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale..

Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, par la loi de Poisson.

Enoncé du théorème limite central.

L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.

b) Echantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.

c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.

d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOEN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n°5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du C.A.P.E.S.

3. Statistiques

3.1 Evolution et résultats globaux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux Deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 1999 CAFEP 1999	945 210	8950 1055	7332 847	2274 107	2174 105	945 57
CAPES 2000 CAFEP 2000	890 206	8038 1130	6750 1030	2067 145	1930 142	890 78
CAPES 2001 CAFEP 2001	990 215	6972 1095	5676 889	2109* 200	1946 194	990 * 113
CAPES 2002 CAFEP 2002	1125 230	6166 906	4948 745	2213 192	2065 189	1125 * 118
CAPES 2003 CAFEP 2003	1195 230	5755 846	4428 636	2328 214	2174 209	1195 116

* *En 2001 et 2002, des listes complémentaires ont été publiées.*

Le CAPES externe de mathématiques traverse depuis quelques années une période marquée par la décroissance du nombre des candidats, accompagnée de la croissance modérée du nombre des postes offerts. Pour la session 2003, nous avons observé un ratio réduit à 4 candidats pour 1 poste. Dans l'hypothèse d'une évolution modérée du nombre de postes offerts, on peut s'attendre à une nouvelle diminution de ce ratio dans les prochaines années si l'on se rapporte à l'évolution actuelle des effectifs en licence de mathématiques.

Le jury est pour sa part conscient de ses obligations, dont l'une est de proposer des candidats de qualité, et une autre est de proposer autant que possible de pourvoir tous les postes offerts. Il en découle l'obligation de garder au concours un aspect suffisamment attractif : tant en ce qui concerne les épreuves écrites que les épreuves orales, le but poursuivi est de donner aux candidats le sentiment d'une évaluation juste et exigeante, mais qui reste en même temps humaine. C'est par exemple dans cet esprit que le jury s'efforce systématiquement de rassurer individuellement les candidats qui, lors des épreuves orales, expriment leur anxiété et leur manque de confiance en eux, et c'est également dans cet esprit que l'accueil de tous les candidats est organisé.

Les barres d'admissibilité et d'admission restent identiques pour les deux concours (CAPES et CAFEP). Ceci nous a conduit cette année encore à ne pas proposer pour le CAFEP une liste de la longueur maximale autorisée.

3.2 Statistiques par catégories

C.A.P.E.S.

Catégorie (situation professionnelle)	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	711	355	138	52
Elève IUFM	1883	1841	1086	673
Etudiant	1396	1148	735	328
Cadre conv. collectives	212	65	21	9
Sans emploi	642	337	130	51
Vacataire second degré.	95	66	20	8
Maître auxiliaire	87	60	13	7
Contractuel second degré	624	475	152	54
S E	105	81	33	13
Total	5755	4428	2328	1195

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	2622	2158	1104	621
Hommes	3133	2270	1224	574
Français et Union Européenne	5737	4423	2328	1195
U.E. non français	44	24	12	5
Etrangers hors U.E.	18	5	0	0
Moins de 30 ans	4695	3898	2142	1117
Moins de 25 ans	2843	2589	1594	881

C.A.F.E.P.

Catégorie (situation professionnelle))	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	201	193	95	66
Etudiant	126	98	39	14
Enseignant titulaire Educ.Nationale	13	5	2	1
Agent non titulaire Educ.Nationale	251	180	39	19
Enseignement privé	100	84	22	11
Agent fonction publique état	10	7	1	0
Hors fonction publique ou sans emploi	145	69	16	5
Total	846	636	214	116

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	558	448	142	83
Hommes	288	188	72	33
Moins de 30 ans	650	547	189	103
Moins de 25 ans	316	282	123	70

3.3 Résultats par académie

C.A.P.E.S.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	339	253	122	52
Amiens	150	120	47	21
Besançon	121	105	61	33
Bordeaux	252	202	112	55
Caen	130	107	65	30
Clermont-Ferrand	99	80	54	35
Corse	22	16	5	3
Dijon	158	125	77	31
Grenoble	226	171	84	47
Guadeloupe	101	65	7	3
Guyane	6	2	1	1
Lille	420	332	176	90
Limoges	63	46	17	10
Lyon	261	209	129	75
Martinique	39	16	1	1
Montpellier	254	197	77	31
Nancy-Metz	212	172	109	61
Nantes	277	227	120	54
Nice	158	134	56	25
Orléans / Tours	155	121	61	30
Paris / Créteil / Versailles	1055	729	381	213
Poitiers	160	137	84	47
Reims	118	97	62	34
Rennes	252	203	110	59
Réunion	84	57	25	11
Rouen	153	117	62	29
Strasbourg	174	144	88	47
Toulouse	316	244	135	67

C.A.F.E.P.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	32	23	8	5
Amiens	11	7	2	1
Besançon	13	5	2	2
Bordeaux	49	33	12	6
Caen	17	12	6	2
Clermont-Ferrand	13	10	6	5
Corse	1	1	0	0
Dijon	9	8	0	0
Grenoble	48	34	9	6
Guadeloupe	2	2	0	0
Guyane	1	0	0	0
Lille	66	58	20	10
Limoges	2	2	0	0
Lyon	46	35	15	9
Martinique	1	0	0	0
Montpellier	36	26	10	3
Nancy / Metz	24	17	3	1
Nantes	120	106	39	18
Nice	21	16	2	2
Orléans / Tours	12	7	2	2
Paris / Créteil / Versailles	123	81	33	18
Poitiers	8	6	3	0
Reims	14	7	3	1
Rennes	97	79	28	18
Réunion	4	4	0	0
Rouen	20	15	1	0
Strasbourg	14	14	1	1
Toulouse	39	28	9	6

3.4 Répartition des notes

La barre d'admissibilité a été fixée à 7,1/20 (7,2/20 en 2002 , 7,4/20 en 2001 , 7,4/20 en 2000)

Épreuves écrites du C.A.P.E.S.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	1	1	1	1	1	1
19	2	2	2	3	3	3	5	5	5
18	5	5	5	9	9	9	15	15	13
17	9	9	8	22	22	18	25	25	20
16	24	24	19	30	30	24	57	56	46
15	50	50	39	54	54	41	128	127	101
14	101	101	78	99	99	78	220	219	172
13	201	201	163	183	183	140	456	454	343
12	401	401	319	341	341	262	893	891	609
11	702	702	528	578	577	427	1356	1348	848
10	1116	1116	781	1071	1052	698	1659	1621	959
9	1550	1550	965	1417	1373	861	1999	1878	1055
8	2006	2006	1134	1863	1740	1019	2333	2075	1128
7	2454	2328	1195	2199	1951	1097	2813	2245	1174
6	2899	2328	1195	2734	2180	1161	3102	2296	1189
5	3302	2328	1195	3079	2255	1180	3442	2324	1195
4	3684	2328	1195	3608	2325	1195	3772	2328	1195
3	3991	2328	1195	3907	2327	1195	4030	2328	1195
2	4216	2328	1195	4161	2328	1195	4190	2328	1195
1	4353	2328	1195	4435	2328	1195	4378	2328	1195
0	4428	2328	1195	4565	2328	1195	4451	2328	1195

Les quartiles, calculés sur l'ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

9,6,4 pour la première épreuve

11,8,5 pour la seconde épreuve

Épreuves écrites du C.A.F.E.P.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	1	1	1	1	1	1
14	3	3	3	5	5	5	6	6	5
13	5	5	5	6	6	6	21	21	16
12	13	13	11	10	10	10	58	58	47
11	38	38	34	21	21	19	105	104	73
10	68	68	56	67	66	49	132	128	85
9	111	111	79	103	97	65	179	168	101
8	168	168	103	148	127	80	239	195	112
7	233	214	116	186	153	97	304	210	115
6	303	214	116	277	191	110	343	213	116
5	378	214	116	343	203	114	402	214	116
4	439	214	116	428	212	115	476	214	116
3	518	214	116	486	214	116	544	214	116
2	581	214	116	543	214	116	581	214	116
1	615	214	116	602	214	116	629	214	116
0	636	214	116	654	214	116	645	214	116

Les quartiles, calculés sur l'ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

7,5,2 pour la première épreuve
9,6,3 pour la seconde épreuve

Épreuves orales et total général des candidats admissibles, C.A.P.E.S. et C.A.F.E.P.

notes sur 20, effectifs cumulés sur les admissibles (adm) et les reçus

	CAPES						CAFEP					
	Total général		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)		Total		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)	
	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus
20	0	0	47	47	16	14	0	0	4	4	3	3
19	0	0	101	101	36	34	0	0	8	8	3	3
18	0	0	184	184	70	68	0	0	19	19	7	7
17	1	1	268	266	128	122	0	0	33	33	13	13
16	10	10	365	356	197	190	0	0	47	44	25	24
15	36	36	476	460	276	264	2	2	65	61	34	33
14	95	95	625	593	409	383	8	8	75	70	49	46
13	236	236	761	708	540	490	18	18	89	80	61	56
12	440	440	914	818	711	625	41	41	105	91	78	69
11	714	714	1029	891	865	730	76	76	119	97	102	82
10	1040	1040	1177	986	1070	858	101	101	127	103	120	94
9	1411	1195	1314	1049	1241	941	136	116	138	106	130	98
8	1663	1195	1473	1104	1449	1038	165	116	153	110	146	104
7	1918	1195	1582	1126	1604	1093	187	116	164	113	164	112
6	2077	1195	1692	1158	1751	1140	201	116	174	115	175	114
5	2151	1195	1786	1174	1848	1161	207	116	179	115	185	115
4	2171	1195	1881	1182	1928	1170	209	116	184	115	198	116
3	2172	1195	1963	1187	2004	1181	209	116	190	116	202	116
2	2172	1195	2057	1192	2093	1192	209	116	201	116	205	116
1	2172	1195	2143	1195	2153	1195	209	116	206	116	209	116
0	2172	1195	2172	1195	2172	1195	209	116	209	116	209	116

4. Les épreuves écrites

Les épreuves écrites ont eu lieu les 11 et 12 mars 2003.

La proportion des candidats ayant abandonné à l'issue de la première épreuve reste comparable à celle observée les années précédentes. Environ 150 candidats ont une note à la première épreuve et ont été absents à la seconde épreuve, soit entre 3 et 4%. Nous trouvons aussi quelques candidats absents à la première épreuve, mais qui sont venus composer le lendemain.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la D.P.E qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes peuvent être attribuées à des copies n'abordant pas l'ensemble du sujet, les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats n'étant pas apparentes dans l'énoncé. Une autre raison pour laquelle les sujets peuvent paraître longs est le lien entre l'évaluation et la formation : le type et le style des sujets retentit sur la formation des candidats des années ultérieures. Aussi les auteurs de sujets s'efforcent-ils de présenter des textes suffisamment construits, aboutissant à des résultats significatifs, et susceptibles d'intéresser et d'influencer la formation.

5. Les épreuves orales

5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 27 juin au 22 juillet 2002 au lycée Lakanal (Sceaux). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et quatorze juillet inclus. Une pause a eu lieu à mi-parcours du 8 au 10 juillet.
Le jury est séparé en 22 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM est toujours un point délicat : il faut veiller à ce que le jury ne s'isole pas trop des formateurs

tout en évitant les effets contestables voire pernicieux d'un possible mélange des genres. Or les formateurs ne peuvent pas toujours facilement passer d'un poste où ils sont directement au contact des futurs candidats à un poste où ils en sont complètement séparés, et en même temps il est souhaitable de faire intervenir dans le jury des personnes ayant une expérience de cette formation. C'est pourquoi chaque cas individuel fait l'objet d'une réflexion appropriée. Cette remarque vaut aussi, quoiqu'à un degré moindre puisqu'il y a anonymat complet, pour la correction des épreuves écrites.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent les candidats pour la deuxième épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.
Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues, ce qui a permis aux candidats dont l'adresse était encore en état de fonctionner de connaître leur résultat immédiatement après la signature de la liste.

Les références des textes officiels décrivant la forme des épreuves orales sont rappelées dans la partie 1.2 de ce rapport.

5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne sont pris en considération par la présidence du jury que dans les deux cas qui suivent :
- coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Education Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple)
- cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants n'est pas une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales comporte un accusé de réception à renvoyer obligatoirement, par retour du courrier, au président du jury. De trop nombreux candidats compliquent et accroissent la tâche de la présidence en traitant de manière négligente cette obligation. L'organisation quotidienne des convocations ne permet en effet de tenir compte des demandes légitimes de déplacement ou report de convocation en procédant à des échanges que si la présidence du jury est informée de la présence ou l'absence prévue par chaque candidat admissible.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en

aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus deux dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes font l'objet d'une double saisie informatique, suivie de l'édition fréquente de listes soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

5.3 L'évaluation des épreuves orales

Á un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.
Le principe selon lequel l'évaluation des compétences purement disciplinaires n'est pas le ressort principal d'un tel concours et repose de fait sur les universités, puisque seuls peuvent s'y présenter les titulaires d'une licence mérite d'être étudié avec soin. Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie le maintien de la présence de l'évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. C'est pourquoi la part de l'évaluation disciplinaire au sein des deux épreuves orales reste importante.
Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir » devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :
- Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc..
- La qualité disciplinaire du contenu : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème.
- Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes, capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, la maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

- 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.
- 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours.
Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport.
Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie **I.2** de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours.
Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie **I.2** page 7), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie **I.2** , page 7). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité.
Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.
L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels –il est vrai rudimentaires- de géométrie.
Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier. Choix d'exercices sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

- Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème,…), puis ;
- Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure, entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre au moins un exercice choisi par la commission.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie **5.5** ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport. Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. L'injonction selon laquelle le dossier appelle une présentation à l'aide d'une calculatrice devient *obligatoire* pour certains dossiers, dossiers dans lesquels figure, immédiatement après l'énoncé du thème, l'avertissement suivant :

" Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice ".

Cet avertissement figure dans les dossiers suivants :
06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 67, 68, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 81, 83, 84, 85, 86, 88, 91, 92, 93, 94.
La non prise en compte de cet avertissement entraîne nécessairement une dévalorisation importante de la prestation du candidat.

Suivant les directives parues dans le BO n° 35 du 9 octobre 1997, les sujets :
06, 07, 08, 09, 10, 11, 17, 18, 19, 22, 55, 64, 70, 73, 75, 94 ont la mention :
le candidat doit prouver "qu'il a réfléchi à la dimension civique de tout enseignement et plus particulièrement de celui de la discipline dans laquelle il souhaite exercer ".

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n°21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas. Les candidats ont à choisir un sujet parmi deux proposés par le jury.
On rappelle que les "références aux programmes" ne constituent pas un plan de l'exposé, et que la "documentation conseillée" n'est pas exhaustive. Il ne s'agit dans les deux cas que d'une aide apportée aux candidats.

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).
La "documentation conseillée" ne peut-être que très générale. La bibliothèque possède les manuels usuels en plusieurs exemplaires, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut pas être garantie. Afin que tous les candidats puissent disposer d'un choix suffisant de livres on limite leur emprunt à 5 ouvrages au plus.

5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou des exemples nécessitant l'usage d'une calculatrice. Un nombre important des dossiers de seconde épreuve comportent une mention de nature impérative (pour l'un au moins des exercices proposés, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice).

Une enquête a été menée pendant les épreuves orales de la session 2003, d'où ressortent les résultats approximatifs suivants :

-pour la première épreuve (exposé) environ 28% des candidats empruntent une calculatrice.
-pour la seconde épreuve (dossier) environ 44% des candidats empruntent une calculatrice.

Une partie des candidats empruntent une calculatrice mais ne s'en servent que pendant leur préparation. Ceci explique que, devant le jury, l'emploi des calculatrices apparaisse avec une fréquence inférieure :

-pour la première épreuve (exposé) environ 9% des candidats utilisent une calculatrice.
-pour la seconde épreuve (dossier) environ 21% des candidats utilisent une calculatrice.

Enfin, depuis la session 2001, les candidats ont la possibilité de projeter l'écran de la calculatrice qu'ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe.

-pour la première épreuve (exposé) environ 7% des candidats utilisent la rétroprojection.
-pour la seconde épreuve (dossier) environ 13% des candidats utilisent la rétroprojection.

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices –avec ou sans rétroprojection – met en évidence que, si souvent cet usage n'apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d'année en année. Il est intéressant de noter que, à partir du moment où il y a usage de la calculatrice devant le jury, le passage à la rétroprojection est plus largement majoritaire pour la première épreuve que pour la seconde. L'ensemble de ces pourcentages, pourcentages encore minoritaires, doit être apprécié en fonction du fait que de nombreux sujets n'appellent pas particulièrement une illustration au moyen des calculatrices, ce qui minore évidemment les résultats d'une telle enquête.

Certains candidats qui n'ont pas la maîtrise suffisante d'un modèle de calculatrice permettant une démonstration à but pédagogique indiquent qu'ils possèdent une certaine maîtrise de l'outil ordinateur ; ce peut notamment être le cas pour des étudiants ayant reçu une formation à un logiciel de calcul formel pendant leurs années initiales de formation post-baccalauréat. Il est fortement conseillé aux candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques de tenir compte du fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques.

Les conditions de rétroprojection restent minimalistes, malgré l'aide du S.I.E.C. qui a obligeamment mis à notre disposition le nombre de projecteurs souhaités. En effet, les salles sont généralement dépourvues d'écrans déroulables et l'obturation de leurs fenêtres est très inégale. Néanmoins chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, évidemment en faisant abstraction de la qualité technique de la projection.

II ENONCES ET ANALYSE DES EPREUVES ECRITES

1. Enoncé de la première épreuve

Notations et objets du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels, par* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels et par* $\mathbb{R}^+$ *l'ensemble des réels positifs ou nuls.*

Pour tout entier naturel n *et tout entier* k *compris entre* 0 *et* n*, on note* C_n^k *le coefficient binomial défini par :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Si A, B *sont deux ensembles, avec* B *inclus dans* A*, on note* $A \setminus B$ *l'ensemble :*

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

On rappelle que si E *est un espace vectoriel réel, une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in K}$ *de vecteurs non nuls de* E *est une base si pour tout vecteur* x *dans* E *il existe une unique famille de scalaires* $(x_j)_{j \in L}$*, où* L *est une partie finie de* K*, telle que* $x = \sum\limits_{j \in L} x_j e_j$.

Sauf indication contraire, on désigne par a *et* b *des réels tels que* $a < b$ *et par* I *l'intervalle fermé borné* $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}(I)$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* I *à valeurs réelles et continues.*

On note $\mathcal{F}$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles périodiques de période* 2π et *continues.*

Pour éviter les répétitions dans les définitions qui suivent on désigne par $\mathcal{H}$ *l'espace vectoriel* $\mathcal{C}(I)$ *ou* $\mathcal{F}$ *et par* J *l'intervalle* I *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{C}(I)$ *ou l'intervalle* $\mathbb{R}$ *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{F}$.

Pour toute fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *on désigne par* $|f|$ *la fonction définie par :*

$$|f| : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}$$

L'espace $\mathcal{H}$ *est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in J} |f(x)|.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}$ *de la relation d'ordre partiel notée* $\leq$ *et définie par :*

$$\forall (f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (f \leq g) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in J, \quad f(x) \leq g(x)).$$

On dit qu'une fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *est positive et on note* $0 \leq f$*, si* $0 \leq f(t)$ *pour tout* t *dans* J.

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *l'espace vectoriel des endomorphismes de* $\mathcal{H}$*. Un élément de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est aussi appelé un opérateur linéaire sur* $\mathcal{H}$.

On dit qu'un opérateur linéaire u *sur* $\mathcal{H}$ *est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à* $\mathcal{H}$ *en une fonction positive.*

On note $\mathbb{R}[x]$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base* $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = x^k.$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels. Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, & s_k(x) = \sin(kx). \end{cases}$$

On remarquera que $c_0 = e_0$.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, on désigne par $(a_k(f))_{k\geq 0}$ et $(b_k(f))_{k\geq 1}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 \tag{1}$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\, c_k + b_k(f)\, s_k\right). \tag{2}$$

La partie **I** *est consacrée aux opérateurs linéaires positifs. Cette partie est utilisée par les parties* **II** *et* **III**.

La partie **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle fermé borné et à valeurs réelles :*

Théorème 1 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

La partie **III** *indépendante de la partie* **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions périodiques, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles :*

Théorème 2 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

– I – Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad |u(f)| \leq u(|f|).$$

I.2 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.

I.3 Montrer que tout opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$ est continu.

I.4 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Justifier l'existence de :

$$\|u\|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et exprimer cette quantité en fonction de u et de e_0.

I.5 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.*
Soit n un entier strictement positif. Etant donnés $n+1$ points $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ deux à deux distincts de I et $n+1$ fonctions $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{C}(I)$, montrer que l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k}) u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$, pour k compris entre 0 et n, sont positives.

I.6 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.*
On note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(x, y) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, \quad B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{3}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \tag{4}$$

I.6.1 Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

I.6.2 Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

I.6.3 Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

I.7 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et on désigne par K un polynôme trigonométrique. On associe à ce polynôme l'opérateur linéaire u défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t)\, dt.$$

I.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t)\, dt.$$

I.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3 Montrer que l'opérateur linéaire u est positif si et seulement si la fonction K est à valeurs positives ou nulles.

I.8 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, on se donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'opérateur linéaire T_n défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{5}$$

où S_0 désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par (1) et *pour tout entier naturel k* non nul, *S_k désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par* (2).

I.8.1 Montrer que, pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$. On note encore θ_p ce prolongement.

I.8.2 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right). \tag{6}$$

I.8.3 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

I.8.4 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right). \tag{7}$$

I.8.5 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt,$$

où K_n est un polynôme trigonométrique.

I.8.6 Montrer que l'opérateur linéaire T_n est positif.

I.8.7 Calculer $S_n(c_j)$, $T_n(c_j)$ pour tout entier naturel j et $S_n(s_j)$, $T_n(s_j)$ pour tout entier naturel j non nul.

– II – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.

II.1 Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t, x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t - x)^2. \tag{8}$$

II.2 *Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}(I)$, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, on désigne par $g - g(x)e_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0\right). \tag{9}$$

II.3 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\right). \tag{10}$$

II.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

II.4.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (10)).

II.4.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.5 Pour cette question on prend $[a,b]=[0,1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n\geq 1}$ définie par (4).
Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

II.6 *Pour cette question $I=[a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

II.7 Pour cette question on prend $I=[0,b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x)=f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.

II.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :

$$\forall x\in I,\quad u_n(f)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k.$$

II.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

II.8 *Pour cette question $I=[a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Soient $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ trois fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_0,a_1,a_2 non tous nuls tels que la fonction $\theta=a_0\theta_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2$ admette au moins trois racines réelles deux à deux distinctes, x_0,x_1,x_2 dans I.

II.8.1 Montrer qu'on peut trouver trois réels $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} |\lambda_k|<1 \quad (k=0,1,2), \\ \text{au moins deux des } \lambda_k \text{ sont positifs ou nuls,} \\ \lambda_0\theta_k(x_0)+\lambda_1\theta_k(x_1)+\lambda_2\theta_k(x_2)=0 \quad (k=0,1,2). \end{cases}$$

En modifiant si nécessaire la numérotation des racines de la fonction θ, on peut supposer que :

$$-1<\lambda_0\leq\lambda_1\leq\lambda_2<1,\quad \lambda_1\geq 0.$$

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par δ_n la restriction à l'intervalle I de la fonction affine par morceaux et continue définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} & x\notin\left[x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right] \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x)=0, \\ & \delta_n(x_0)=1, \\ & \delta_n \textit{ affine sur } \left[x_0-\frac{1}{n},x_0\right] \textit{ et sur } \left[x_0,x_0+\frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

On associe à δ_n l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f\in\mathcal{C}(I),\quad u_n(f)=(e_0-\delta_n)f+((1+\lambda_0)f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2))\delta_n.$$

II.8.2 Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'opérateur linéaire u_n est positif.

II.8.3 Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et 2, la suite de fonctions $(u_n(\theta_k))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur $[a,b]$.

II.8.4 Montrer qu'on peut trouver une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

– III – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

III.1 Montrer que toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

III.2 Soient f appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\psi_x(t). \tag{11}$$

Pour f appartenant à $\mathcal{F}$ et x fixé dans $\mathbb{R}$, $f - f(x)c_0$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

III.3 Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1). \tag{12}$$

III.4 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{F}$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(f - f(x)c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)). \tag{13}$$

III.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

III.5.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.2 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser (13)).

III.5.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

III.6 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ définie par (5) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. Analyse de la première épreuve

Rapport sur la première épreuve
Capes Externe 2003

16 septembre 2003

1 Objet du problème

Une démonstration du théorème de Stone-Weierstrass sur l'approximation uniforme par des polynômes d'une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné consiste à montrer que, si pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ on note $(B_n(f))_{n\geq 1}$ la suite de ses polynômes de Bernstein, alors la convergence uniforme de $(B_n(f))_{n\geq 1}$ vers f pour $f=1$, $f=x$ et $f=x^2$ suffit à prouver la convergence uniforme de $(B_n(f))_{n\geq 1}$ vers f pour toute fonction f.

Ce résultat, qui est un cas particulier d'un résultat plus général du à Korovkin (1953), est à la base de ce problème.

2 Les outils

Ce problème porte sur une large partie du programme.

— Applications linéaires continues dans un espace vectoriel normé.
— Inégalité triangulaire dans un espace vectoriel normé.
— Polynômes, polynômes trigonométriques.
— Formule du binôme de Newton.
— Dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$.
— Fonctions périodiques. Fonctions et trigonométriques.
— Changement de variable affine.
— Coefficients et séries de Fourier.
— Propriétés de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue (et périodique) sur un compact (sur $\mathbb{R}$).
— Prolongement par continuité.
— Formules de trigonométrie. Sommes de sinus et cosinus.
— Intégration d'un produit de sinus et cosinus.
— Propriétés des fonctions continues sur un compact (uniforme continuité).
— Convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions.
— Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente.
— Sommation de séries entières déduites de l'exponentielle.
— Système de Cramer 3×3.

3 Remarques d'ordre général

Un candidat ayant correctement traité la première partie est assuré d'une bonne note.

Les candidats doivent lire l'énoncé avec attention. Il faut être capable de s'adapter à une situation nouvelle en réorganisant ses connaissances, ce qui ne signifie pas faire table rase de ces dernières.

Par exemple les confusions entre variables sont très fréquentes ainsi que le peu de distinction entre polynôme trigonométrique et fonction continue 2π-périodique.

La nature de l'opérateur u n'est pas toujours comprise. On trouve des phrases du genre « u est continue sur J », ou « $u(e_0)=u(1)$ » qui conduit à un $\eta=\dfrac{\varepsilon}{u(e_0)}$, ou « l'image d'une fonction constante est nécessairement une constante », ou d'autres encore qu'il n'est pas utile de reproduire.

Un nombre inquiétant de candidats ne font aucune distinction entre la fonction f et le réel $f(x)$. On constate aussi une confusion entre la valeur absolue de f et la norme infinie de f. On trouve par exemple des résultats du style $\|u\|_\infty = u(e_0)$ et ce, de façon beaucoup trop fréquente.

Certains candidats n'ont aucune idée de ce qu'est une application linéaire continue ou ce que signifie la convergence uniforme, d'autres (ou les mêmes) pensent qu'une application linéaire « périodique » (i. e. telle que $u(f+e_0)=u(f)$) est nécessairement nulle ou encore qu'une application linéaire est nécessairement continue.

Malgré l'expérience les correcteurs sont toujours étonnés quand il lisent qu'une somme de réels (ou l'intégrale d'une fonction) qui est positif est nécessairement constituée de termes positifs.

Il faut avoir à l'esprit que terminer brutalement un calcul pour aboutir au résultat est tout aussi inadmissible de la part d'un candidat à un concours de recrutement d'enseignants qu'il est usuellement d'un élève.

Pour pouvoir exiger plus tard de ses élèves une rédaction excluant le « bluff », il est indispensable que le futur enseignant rédige lui même de manière à ne pas donner prise à un tel soupçon.

Ce problème permet d'étager les erreurs ou confusions par niveau d'étude :

- Au niveau Lycée : les notions de dérivation d'une fonction composée, trigonométrie, exponentielle complexe, sommes géométriques, continuité des fonctions, distinction entre l'objet fonction et sa valeur en un point, ne sont pas toujours maîtrisées. Ces lacunes se retrouvent à l'oral.
- Au niveau premier cycle universitaire : la rigueur, la logique et la rédaction prennent à ce niveau une importance plus grande qu'en Lycée. Voir les remarques sur la continuité, l'uniforme continuité, les fonctions périodiques et trigonométriques, les séries, les changement de variable dans une intégrale.
- Au niveau deuxième cycle universitaire : ce sont les différences entre espaces vectoriels normés de dimension finie ou non, d'application linéaire continue, de convergence uniforme, sur les séries de Fourier, qui ne sont pas toujours dominées.

4 Analyse de quelques questions

En **I.1.** Un nombre non négligeable de candidats pensent qu'une fonction f qui n'est pas positive est nécessairement négative. On rencontre aussi des bases finies ou dénombrables pour $\mathcal{C}(I)$. Un point essentiel, qu'il fallait mettre en évidence, est que la linéarité et la positivité de u entraîne sa croissance.

Pour cette question comme en **I.5.** on manipule des fonctions positives mais sans se préoccuper de leur continuité. Par exemple en **I.5.** on rencontre la rédaction incomplète suivante « soit f positive telle que $f(x_{n,k}) = 1$ et $f(x_{n,j}) \neq 0$ pour $j \neq k$ » sans préciser que f est continue.

En **I.2.** On rencontre trop souvent l'idée que u linéaire entraîne $u(e_0 \cdot f) = u(e_0)\, u(f)$.

En **I.4.** L'existence de $\dfrac{\|u(f)\|}{\|f\|}$ pour f non nulle parait suffisant à nombre de candidats pour assurer l'existence de $\|u\|_\infty$.

En **I.6.2.** Calcul des $B_n(e_j)$ par une récurrence qui n'aboutit pas. Les dérivées partielles ne sont pas toujours maîtrisées.

En **I.7.1.** Dans certaines copies, le changement de variable $y = x - t$ n'a aucune influence sur les bornes d'intégration (sans prendre en considération la périodicité).

Le **I.8.1.** n'est fait correctement que dans un nombre limité de copies alors qu'il s'agit d'une question élémentaire. Certains candidats utilisent la limite d'une fonction avant d'avoir prouvé que cette limite existe. On peut aussi utiliser la règle de l'Hospital à condition de bien préciser les hypothèses.

En **I.8.2.** Manipulation de la série géométrique de raison e^{ix} sans se soucier du cas où la raison vaut 1.

Le **I.8.7.** qui est un résultat de base sur les séries de Fourier (orthogonalité des sinus et cosinus) n'est quasiment jamais traité.

En **II.1.** le lien avec l'uniforme continuité n'est pas toujours vu.

Pour **II.4.1.** la solution est évidente à condition de remarquer que les fonctions considérées sont bornées, ce qui n'est pas toujours fait.

En **II.6.** il ne suffisait pas d'énoncer le théorème de Stone-Weierstrass sur $[a, b]$, il s'agissait de retrouver ce résultat avec les questions précédentes.

En **II.7.1.** beaucoup de candidats manipulent la somme de la série avant d'avoir prouvé sa convergence.

La question **II.7.2.** (la seule délicate du problème) n'est jamais traitée correctement.

Le résultat classique de **III.1.** n'est quasiment jamais traité correctement.

Les autres questions de la troisième partie ne sont abordées que par quelques rares candidats.

Certains pensent grappiller des points en traitant les questions analogues à celles de la partie **II.** Il faut savoir que cette technique est pénalisante si on se contente de ne traiter que quelques questions élémentaires dans chaque partie. Mais cette pratique n'est constaté que dans un faible nombre de copies.

3. Enoncé de la seconde épreuve

Notations, rappels et présentation du problème.

L'ensemble des entiers naturels sera noté $\mathbf{N}$, celui des entiers relatifs $\mathbf{Z}$.On notera $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles pour la multiplication.

Etant donnés deux entiers relatifs a et b , le plus grand diviseur commun de a et b sera noté PGCD(a, b) ou $a \wedge b$. On rappelle que $a \wedge 0 = a$.
a est dit premier avec b si $a \wedge b = 1$.
$a \equiv b \; mod \; n$ signifie que a est congru à b modulo n, c'est-à-dire que n divise $(b - a)$.

Un groupe (G,$\times$) est dit cyclique s'il existe un élément a de G et un entier naturel p tel que G = $\left\{1, a, a^2, a^3, ..., a^p\right\}$, où $a^k = a \times a \times ... \times a$ (k termes) ; a est alors un générateur de (G,$\times$).

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 2, on notera respectivement :
S_n l'ensemble des entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à n, et premiers avec n.
D$_n$ l'ensemble des diviseurs de n, entiers positifs (en particulier, 1 appartient à D$_n$).

La notation $\sum\limits_{d \in D_n}$ désignera une somme étendue à tous les éléments d de D$_n$.

Enfin on notera $\phi(n)$ le cardinal de S$_n$.

La première partie du problème a pour but d'établir une identité due à Euler concernant la fonction ϕ, à l'aide d'un raisonnement probabiliste.

Dans la deuxième partie, on étudie le groupe des éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et on montre que, si n n'a qu'un seul diviseur premier, alors ce groupe est cyclique.

La troisième partie introduit la notion de nombres pseudo-premiers forts et se propose d'en donner une caractérisation algorithmique sur une calculatrice programmable.

Enfin, la quatrième partie a pour objet l'étude de nombres appelés nombres de Carmichaël, présentant des similarités avec les nombres premiers, et se termine par la présentation d'un test probabiliste pour la détection de nombres premiers.

Partie I

1. On considère dans cette question un univers probabilisé (Ω, B, P). L'événement contraire d'un événement E sera noté $\overline{E}$
   (a) Soient A_1 et A_2 deux événements indépendants de cet univers : montrer que $\overline{A_1}$ et A_2 sont indépendants.
   (b) Généralisation : soit k un entier naturel non nul et $A_1, A_2, ...A_k$ k événements mutuellement indépendants de Ω.
      (I) Montrer que $\overline{A_1}, A_2, ...A_k$ sont indépendants.
      (II) Montrer par récurrence que $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...\overline{A_k}$ sont indépendants.

   Dans toute la suite de cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X une variable aléatoire sur Ω, prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, .., n\}$ de manière équiprobable, c'est-à-dire telle que pour tout $i = 1, .., n$ on a $P(X = i) = \dfrac{1}{n}$.

2. On considère l'événement A_1 : "X est multiple de 2" et l'événement A_2 : "X est multiple de 5"
   (a) On suppose que $n = 100$.
   Calculer les probabilités des événements A_1 et A_2. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
   (b) On suppose maintenant que $n = 101$. Reprendre les questions du (a) dans ce cas.

3. On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
   Enfin, pour i entier naturel, $1 \leq i \leq k$, A_i désigne l'événement "X est divisible par p_i".
   (a) Soit A l'événement : "X est premier avec n" ; exprimer P(A) à l'aide de n et de $\phi(n)$.
   (b) Montrer que $P(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$ pour tout entier i, $1 \leq i \leq k$.
   (c) Montrer que les $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont mutuellement indépendants.
   (d) Exprimer A à l'aide des $\overline{A_i}$.
   (e) En déduire que $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \dfrac{1}{p_i})$ (E).

4. On se propose de retrouver l'égalité précédente (E) par une autre méthode : soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux ;
   On considère l'application h: $\begin{cases} S_{pq} \to \{0, ..., p-1\} \times \{0, ..., q-1\} \\ r \to (a, b) \end{cases}$ où a (resp b) est le reste de la division de r par p (resp par q).
   (a) Montrer que h(S_{pq}) est inclus dans $S_p \times S_q$.
   (b) Montrer que h est injective.
   (c) Justifier l'existence de deux entiers α et β de **Z** tels que : $\alpha p + \beta q = 1$.
   Soit (a, b) un couple de $S_p \times S_q$. On note $x = \alpha pb + \beta qa$; montrer que $x \equiv a \bmod p$ et que $x \equiv b \bmod q$.
   En déduire que l'image de h est $S_p \times S_q$, puis que $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$.
   (d) A l'aide d'une récurrence sur le nombre de diviseurs premiers de n, retrouver alors l'égalité (E).

5. Identité d'Euler :
   (a) Soit d un diviseur de n et a un entier naturel non nul ; montrer que PGCD$(a, n) = d$ si, et seulement si, il existe un entier k premier avec $\frac{n}{d}$ tel que $a = kd$. En déduire le nombre des entiers a tels que $1 \leq a \leq n$ et PGCD$(a, n) = d$.
   (b) Pour tout entier d diviseur de n, on note C$_d$ l'événement "PGCD(X,n)=d".

   Exprimer P(C$_d$) à l'aide de n, d et de la fonction ϕ
   (c) En déduire que $\sum_{d \in D_n} \frac{1}{n}\phi(\frac{n}{d}) = 1$ (rappel : D$_n$ note l'ensemble des diviseurs de n dans **N**).
   (d) Montrer que l'application u qui, à tout diviseur d de n associe u(d)=$\frac{n}{d}$ est une bijection de D$_n$ dans lui-même. Montrer que $\sum_{d \in D_n} \phi(d) = n$ (identité d'Euler).

Partie II

n étant toujours un entier supérieur ou égal à 2, l'objet de cette partie est l'étude du groupe noté $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$ des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles pour la multiplication.

On rappelle que cet ensemble est composé des classes modulo n des nombres premiers avec n. On pourra donc remarquer que $\phi(n) = card\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*\right)$.
La classe d'un entier a sera notée $\dot{a}$.

A) Des résultats généraux sur les groupes et les anneaux.

1. Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif (A,+,$\times$) et n un entier naturel non nul. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$.
   Donner le quotient de $b^n - a^n$ par $b - a$ sous forme de somme.

2. Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$ est un corps si, et seulement si, n est premier.

3. Factorisation de polynômes.
   (a) Soit P un polynôme de degré k supérieur ou égal à 1, à coefficients dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où n est un entier premier.

   Montrer que P admet au plus k racines (on pourra raisonner par récurrence sur k).
   (b) Déterminer, dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, les racines du polynôme P(X)=X^2−X. Que peut-on en conclure ?
   (c) Trouver, dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}\,[X]$, deux factorisations distinctes de X^2−X sous la forme (X-$\dot{a}$)(X-$\dot{b}$).

4. On rappelle que si x est élément d'un groupe fini G, l'ordre de x est le plus petit entier naturel k non nul tel que $x^k = 1$, où 1 désigne l'élément neutre de G.
   (a) Soit x un élément de G, groupe fini de cardinal n ; montrer que, si k est l'ordre de x, alors l'ensemble $\left\{1, x, ..., x^{k-1}\right\}$ est un sous-groupe de G.

   En déduire que l'ordre de x divise le cardinal de G, et que $x^n = 1$.
   (b) Si p est un entier naturel premier et x un entier naturel non divisible par p, montrer que $x^{p-1} - 1$ est divisible par p.

B) Etude du groupe $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$ quand n est premier.

On suppose dans cette sous-partie que n est un entier premier supérieur ou égal à 3. Si d est un entier naturel non nul et strictement inférieur à n, on note $\zeta(d)$ le nombre des éléments de $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$ d'ordre d.

1. Montrer que $\sum_{d \in D_{n-1}} \zeta(d) = n - 1$.

2. Soit d un diviseur de $n-1$ et soit $\dot{a}$ un élément de $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$ d'ordre d, s'il existe.
   $\dot{a}$ vérifie ainsi $\dot{a}^d = \dot{1}$.
   (a) Montrer que l'ensemble des racines du polynôme $X^d - \dot{1}$ est, dans $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$, $\left\{\dot{1}, \dot{a}, \dot{a}^2, \dot{a}^3, ..., \dot{a}^{d-1}\right\}$.
   (b) On suppose que k est un entier naturel inférieur ou égal à d, non premier avec d. Montrer que $\dot{a}^k$ a un ordre strictement inférieur à d.
   (c) En déduire que $\zeta(d) \leq \phi(d)$.

   Déduire des questions précédentes et de la première partie que $\zeta(d) = \phi(d)$ pour tout diviseur d de $n-1$.

   Montrer en particulier qu'il existe au moins un élément $\dot{b}$ d'ordre $n-1$ dans $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$ et que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^* = \left\{\dot{1}, \dot{b}, \dot{b}^2, ...\dot{b}^{n-2}\right\}$.

C) Cas n=p$^\alpha$.

On suppose maintenant que n s'écrit sous la forme $n = p^\alpha$, où p est un entier premier, et α un entier naturel supérieur ou égal à 2.

D'après la partie II B), il existe donc un entier b, dont la classe $\dot{b}$ est d'ordre $p-1$ dans $\left((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, \times\right)$.

1. Montrer que l'un au moins des deux entiers b^{p-1} ou $(b+p)^{p-1}$ n'est pas congru à 1 modulo p^2 ; on notera c l'un des nombres b ou $b+p$ de façon à ce que c^{p-1} ne soit pas congru à 1 modulo p^2.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel r, il existe un entier k_r premier avec p tel que $c^{p^r(p-1)} = 1 + k_r \times p^{r+1}$. En déduire que $\dot{c}$ appartient à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.

3. Soit r l'ordre de $\dot{c}$ dans $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$.
   (a) Expliquer pourquoi r divise $p^{\alpha-1}(p-1)$ et pourquoi $(p-1)$ divise r.
   (b) En déduire qu'il existe un entier naturel β inférieur ou égal à $\alpha - 1$ tel que $r = p^\beta(p-1)$.
   (c) Montrer finalement que $\beta = \alpha - 1$ et que $\dot{c}$ est un générateur de $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$.

4. Application : Déterminer un générateur de $\left((\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*, \times\right)$ puis un générateur de $\left((\mathbf{Z}/49\mathbf{Z})^*, \times\right)$.

Partie III

Nombres pseudo-premiers forts

Dans toute cette partie, p désigne un entier impair supérieur ou égal à 3, et on notera $(p-1) = q \times 2^s$, où q est un entier naturel impair et s un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Dans cette question, on suppose p premier.
   (a) Soit a un entier premier avec p. Montrer que a$^{\frac{p-1}{2}}$ est congru à 1 ou à $p-1$ modulo p.
   (b) On dit qu'un entier naturel a vérifie la propriété $H_a(p)$ si :
   $(a^q \equiv 1 \bmod p)$ *ou* ($\exists$ r entier, $0 \leq r < s$ tel que $a^{q \times 2^r} \equiv p-1 \bmod p$) $H_a(p)$

   Montrer que tout entier naturel a premier avec p vérifie $H_a(p)$.

2. On dit qu'un nombre p impair, non nécessairement premier, est pseudo-premier fort en base a si la propiété H$_a(p)$ est vérifiée ; on écrira en abrégé que p est a-ppf.

   Par exemple, 25 est 7-ppf car 24=3*2^3 et $7^{3\times 2} = 117649 \equiv 24 \equiv -1 \bmod 25$.

   Montrer que si a est un entier tel que le pgcd de a et p est strictement plus grand que 1, alors p ne peut pas être a-ppf.

3. Construction d'un algorithme :
   (a) Un entier p impair et un entier a étant donnés, écrire un algorithme permettant de tester si p est a-ppf.

   N.B. : On ne cherchera pas à écrire, pour le calcul de a^q modulo p un algorithme rapide de puissance, mais on pourra se contenter d'une boucle calculant a^2 modulo p, a^3 modulo p, ..., a^q modulo p.

   Vous retranscrirez cet algorithme sur votre copie en langage algorithmique (français) ou dans le langage de votre machine, en spécifiant le modèle que vous employez.

   Implanter cet algorithme sur votre machine ; on peut le tester en contrôlant que tout nombre p premier est a-ppf pour tout a premier avec p.

   (b) Reportez le tableau suivant sur votre copie et complétez les cases vides par "oui" ou "non" à l'aide du programme précédent.

p	49	91	111	121	135	1225
a	30	74	28	94	43	999
p est a-ppf						

   (c) On peut vérifier (la vérification n'est pas demandée) que l'ensemble des entiers a, compris au sens large entre 1 et 560 tels que 561 soit a-ppf. est $\{1, 50, 101, 103, 256, 305, 458, 460, 511, 560\}$.

   Montrer que l'ensemble des classes modulo 561 de ces entiers constitue un sous-groupe cyclique de $\left((\mathbf{Z}/561\mathbf{Z})^*, \times\right)$.

Partie IV

A) Nombres de Carmichaël

L'objet de cette partie est la caractérisation de certains nombres, appelés nombres de Carmichaël.
On rappelle que pour tout entier naturel premier p, et tout a entier premier avec p, $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

La réciproque n'est pas vraie ; un nombre n est appelé nombre de Carmichaël si :

a) n n'est pas premier
b) pour tout nombre a premier avec n, a^{n-1} est congru à 1 modulo n.

1. Montrer que si $n = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ où $p_1, p_2, ..., p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts tels que $(p_i - 1)$ divise $(n-1)$ pour tout i de $\{1, 2, ..., k\}$, alors n est un nombre de Carmichaël.

   Montrer en particulier que 561, 10585 sont des nombres de Carmichaël.

2. Dans toute cette question, on suppose que n est un nombre de Carmichaël et l'on désire établir la réciproque du résultat obtenu en question 1.

   (a) On suppose tout d'abord que n est une puissance de 2, $n = 2^\alpha$, où α est un entier ≥ 2.

   Quel est le cardinal de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$? En déduire que pour tout entier a impair $a^{(2^\alpha - 1)}$ ne peut être congru à 1 modulo n sauf si a est congru à 1 modulo n ; que peut-on conclure ?

   (b) On suppose désormais que n admet au moins un facteur premier impair p_1 et l'on note $p_1, p_2, ..., p_k$ les facteurs premiers de n ; la décomposition de n est alors $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

   (I) Soit ω un entier dont la classe modulo $p_1^{\alpha_1}$ est un générateur de $\left((\mathbf{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbf{Z})^*, \times\right)$; ω existe d'après la partie II. A l'aide de la bijection définie dans la question I 4, montrer qu'on peut trouver un entier t tel que :

   $t \equiv \omega \bmod p_1^{\alpha_1}$ et, pour tout i (s'il en existe) tel que $2 \leq i \leq k$, $t \equiv 1 \bmod p_i^{\alpha_i}$.

   Montrer qu'alors $t^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

   (II) En déduire que $p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)$ divise $(n-1)$, puis que $\alpha_1 = 1$, et enfin que $(p_1 - 1)$ divise $(n-1)$.

   (III) Montrer que n est nécessairement impair et que n peut s'écrire sous la forme $n = p_1 \times p_2 \times .... \times p_k$ où $p_1, p_2, ..., p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts tels que ($p_i - 1$) divise $(n-1)$ pour tout i de $\{1, 2, ..., k\}$ .Conclure.

3. Montrer qu'un nombre de Carmichaël admet au moins trois facteurs premiers.

4. Résoudre l'équation $85p - 16k = 1$, où (k, p) appartient à $\mathbf{Z}^2$.

   Déterminer le plus petit nombre de Carmichaël divisible par 5 et 17.

B) Le test de Miller-Rabin

1. Soit n un nombre non premier et qui ne soit pas non plus un nombre de Carmichaël.

   Montrer qu'il existe au moins un entier a inférieur à n et premier avec n tel que n ne soit pas a-ppf.

2. En fait, on peut démontrer et l'on admettra que, pour tout nombre n non premier, l'ensemble des classes des entiers naturels a strictement inférieurs à n tels que n soit a-ppf est inclus dans un sous-groupe strict de $\left((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*, \times\right)$.
   Le test de Miller-Rabin est alors le suivant : étant donnés un nombre impair n et un entier k, on effectue k épreuves indépendantes ; l'épreuve n°i $(i = 1, ..., k)$ consistant à choisir un entier a_i de manière équiprobable parmi $\{1, 2, 3, ..., n-1\}$ et à tester la propriété "n est a_i-ppf".
   - Si, pour l'un des a_i, n n'est pas a_i-ppf, n est composé.
   - Si n est pseudo-premier fort pour tous les a_i, alors n est déclaré premier.

   On suppose que n est composé (c'est-à-dire non premier) ; par quelle valeur (en fonction de k), peut-on majorer la probabilité de déclarer n premier ?

4. Analyse de la seconde épreuve

Contenu du sujet

Le problème avait pour but de mettre en place un test probabiliste destiné à distinguer les nombres premiers des nombres composés. Ce test a des débouchés pratiques en cryptographie, puisque les méthodes les plus performantes aujourd'hui employées sont basées sur la difficulté que l'on a à « casser » les nombres non premiers, et en particulier trouver les facteurs premiers d'un nombre s'écrivant sous la forme pq, où p et q sont 2 entiers premiers « assez grands » (de l'ordre de 100 chiffres).

La première partie présentait une approche probabiliste de l'identité d'Euler ; les probabilités apparaissaient surtout comme outil de dénombrement, avec utilisation de la notion d'indépendance.
Notons à ce propos que trop de candidats maîtrisent mal cette notion d'indépendance : certains, peu nombreux, la confondent avec l'incompatibilité. Plus répandue est la confusion entre « indépendance » et « indépendance 2 à 2 » ou encore l'erreur consistant à écrire que n événements $A_1, A_2, ..., A_n$ sont indépendants dès que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$
La deuxième partie avait pour but l'étude du groupe formé par les éléments inversibles pour la multiplication de Z/nZ.
Ce groupe est cyclique si n est une puissance d'un nombre entier p (sauf si p=2, ce que l'énoncé oubliait de spécifier, ce cas posant problème dans la question IIC2). Dans une très bonne copie, cette erreur était pointée.

La partie III avait pour but la mise en place de l'algorithme servant de base au test de Miller-Rabin. ; sur un tableau d'exemples, on en testait l'application pratique .
Nous ne saurons trop conseiller aux candidats de bien se familiariser avec leur calculatrice afin de savoir écrire des algorithmes simples ; les calculatrices sont un outil que le futur enseignant de mathématiques aura l'occasion d'utiliser fréquemment dans la conduite de sa classe.

Les parties IV et V étudiaient des nombres pseudo-premiers, appelés nombres de Carmichaël et mettaient en place le test de Miller-Rabin.
Il est à signaler ici que le résultat proposé en conclusion du problème peut être amélioré de la façon suivante : si on teste k fois un nombre n non premier, alors la probabilité de l'annoncer premier est inférieure à $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, ce qui rend ce test très performant.
Notons également qu'il existe un test non probabiliste pour déterminer les nombres premiers (d'après Adleman, Rumely, Pomerance, Lenstra et Cohen), dont l'idée est toujours basée sur l'étude de la réciproque du petit théorème de Fermat et qui est efficace même sur les grands nombres. Cependant ce test est beaucoup plus délicat à programmer.

Remarques sur quelques questions

Ce sont naturellement les deux premières parties, assez progressives, qui ont été le plus abordées, mais des questions ont été souvent traitées avec profit dans les parties suivantes.

Dans la partie I, outre les questions d'indépendance mentionnées dans les remarques générales, des difficultés sont apparues dans la formalisation de la récurrence de la question I.1(b) (ii).
L'hypothèse de récurrence ne doit pas être $H(k) : \overline{A}_1, \overline{A}_2, ...\overline{A}_k$ sont indépendants.
Certains ont essayé de poser $H(k) : si\ A_1, A_2, ..A_k$ sont indépendants, alors $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ...\overline{A}_k$ le sont.
On considère alors $A_1, A_2, ..A_k, A_{k+1}$ k+1 événements indépendants ; ainsi $A_1, A_2, ..A_k$ le seront ainsi que $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ...\overline{A}_k$ d'après H(k) ; mais quid de $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ...\overline{A}_k, A_{k+1}$ dont l'indépendance est nécessaire pour conclure ?

Question 3) : beaucoup affirment que si a est inférieur ou égal à un entier p et non premier avec p, alors p est divisible par a

Question 4) On peut remarquer que si a est premier avec pq il est premier avec p et q sans qu'il soit besoin de mentionner que p et q sont premiers entre eux.

L'étude de l'injectivité de h est trop souvent basée sur l'étude du noyau alors que la nature de h (linéarité ? morphisme ?) n'est pas évoquée. Il serait intéressant à cet égard de revoir la notion de morphisme, en observant bien les structures concernées.

Question 7) Ce n'est pas parce que l'on peut trouver 2 entiers u et v tels que au+nv= d que nécessairement PGCD(a,n)=d

Dans la partie II, le jury a bien conscience que les candidats ne sont pas familiers avec la factorisation d'un polynôme sur un anneau ; mais, avec l'observation d'exemples simples, on pouvait comprendre que, par exemple, le fait que $a_1, a_2, a_{3,} ..., a_n$ soient racines du polynôme P n'entraîne pas nécessairement que P soit divisible par $(X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$. Ainsi, dans l'exemple proposé par l'énoncé, $X^2 - X$ admet 0,1,3,4 comme racines dans Z/6Z mais n'est pourtant manifestement pas divisible par $X(X-1)(X-3)(X-4)$

Bien que les conditions d'une épreuve de concours n'y soient guère favorables, on attend de la part du candidat un regard suffisamment critique sur le développement qu'il construit pour y repérer les éventuelles incohérences provenant d'erreurs non détectées. Une difficulté permanente concerne le niveau de détail dans la rédaction des raisonnements. Nous devons seulement rappeler qu'une rédaction trop concise risque de se révéler dépourvue de valeur si les éléments essentiels à la validité du résultat ont été laissés de côté. Aussi la mise au point d'une « bonne » rédaction suppose que ces éléments essentiels aient été identifiés. Par ailleurs, la présentation des copies montre globalement un effort auquel nous devons rendre justice.

Etant donné le caractère progressif de l'épreuve, l'éventail des notes a été assez ouvert ce qui a permis une bonne discrimination des copies.

III SUJETS ET ANALYSE DES EPREUVES ORALES

1 . Liste des exposés (1e épreuve orale)

EXPOSÉS

01. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples simples de dénombrement.
02. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
03. Description mathématique d'une expérience aléatoire : ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
04. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
05. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
06. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
07. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
08. Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications.
09. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
10. PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
11. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. L'anneau $\mathbf{Z}$; sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$. Les idéaux de $\mathbf{Z}$ sont principaux. Egalité de Bézout. Résolution dans $\mathbf{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.
13. Nombres décimaux. Applications.
14. Construction du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels.
15. Introduction et construction du corps $\mathbf{C}$ des complexes. Propriétés.
16. Définition de e^z pour z élément de $\mathbf{C}$. Propriétés. Étude de la fonction de variable réelle $t \mapsto e^{it}$ et, plus généralement, de $t \mapsto e^{at}$ où a est un élément de $\mathbf{C}$. Applications.
17. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
18. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
19. Représentation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbf{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
20. Étude de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.
21. Fonction polynomiale du second degré à coefficients réels. Mise sous forme canonique ; application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Équations et inéquations du second degré. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
22. Résolution des systèmes linéaires par opérations élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot. Exemples.
23. Caractérisation vectorielle d'une droite du plan. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme. Orthogonalité.
24. Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections.
25. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

26. Équation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a\cos t + b\sin t \geqslant c$.
27. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires : effet sur les directions, l'alignement, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
28. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
29. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
30. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
31. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
32. Réflexions et rotations du plan. Invariants élémentaires : effet sur les distances, l'alignement, les angles. Application à l'action sur les configurations usuelles.
33. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
34. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
35. Théorème de l'angle inscrit : ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites ou de demi-droites (MA, MB) soit constant. Cocyclicité. Applications.
36. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
37. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
38. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
39. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
40. Étude de l'application $M \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{MA_j}$. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité ; application à la détermination de barycentres attachés à des configurations usuelles du plan, de l'espace.
41. Composées d'homothéties et de translations du plan. Relation vectorielle caractéristique. Groupe des homothéties-translations. Applications.
42. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
43. Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre ; effet sur les distances, conservation des angles orientés. Similitudes directes. Écriture complexe. Groupe des similitudes directes.
44. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
45. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
46. Droites et plans dans l'espace. Équations. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
47. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
48. Ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale dans le plan. Applications (en particulier, projection orthogonale d'un cercle sur un plan).
49. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.
50. Réflexions et rotations de l'espace. Invariants élémentaires : effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

51. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.
52. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.
53. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
54. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
55. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
56. Suites monotones, suites adjacentes. Application à l'approximation d'un nombre réel, au développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.
58. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
59. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
60. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
61. Étude des suites réelles vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$: terme général, discussion selon les valeurs de a et de b, somme des premiers termes, comportement asymptotique... Exemples.
62. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbf{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Exemples.
63. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
64. Fonctions à valeurs réelles continues en un point a de $\mathbf{R}$. Opérations algébriques, composition. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Image d'une suite convergente par une fonction continue.
65. Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.
66. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Propriétés. Exemples.
67. Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
68. Fonctions polynomiales.
69. Fonctions logarithmes.
70. Fonctions exponentielles.
71. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
72. Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples.
73. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.
74. Formules de Taylor. Applications.
75. Développements limités, opérations sur les développements limités.

76. Applications du calcul différentiel à la recherche d'extrémums (maximum et minimum) d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
77. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
78. Emploi du calcul différentiel pour l'étude locale de la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport à une droite passant par un point de la courbe.
79. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
80. Théorème de Rolle. Applications.
81. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
82. Caractérisation des fonctions réelles $x \mapsto x^a$, où a appartient à $\mathbf{R}$, comme solutions continues de l'équation fonctionnelle : $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$. Applications.
83. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles comme solutions continues de l'équation fonctionnelle : $f(x + y) = f(x) \times f(y)$. Applications.
84. Caractérisation de la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^{ax}$, où a appartient à $\mathbf{R}$, par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.
85. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.
86. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
87. Intégration par parties. Exemples de changements de variable. Applications.
88. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

2 . Liste des dossiers (2e épreuve orale)

Parmi ces dossiers, 42 sur les 91 figurant sur la liste ci-dessous comportent la mention :

Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Il s'agit des dossiers dont les numéros suivent :
6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,18,19,21,52,53,54,55,56,57,58,59,
60,61,64,65,67,68,69,72,73,74,77,79,80,81,82,84,87,88,89,90,91,
Ces dossiers sont signalés par le signe (*)

Parmi ces dossiers, 16 sur les 91 figurant sur la liste ci-dessous comportent la mention :

A cette occasion, et en fonction des exercices qu'il a choisi de présenter, le candidat pourra être amené à montrer au jury « qu'il a réfléchi à la dimension civique de tout enseignement et plus particulièrement de celui de la discipline dans laquelle il souhaite exercer » (cf. BO n° 35 du 9 octobre 1997)

Il s'agit des dossiers dont les numéros suivent :
6,7,8,9,10,11,17,18,19,21,52,61,67,70,72,91.
Ces dossiers sont signalés par le signe (**)

01. Exemples simples de problèmes de dénombrement dans différentes situations.

02. Exemples d'emploi de dénombrements pour le calcul de probabilités sur un ensemble fini d'épreuves.

03. Exemples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide de variables aléatoires.

04. Exemples d'expériences aléatoires et de calcul de probabilités attachées à ces expériences dans les cas des tirages avec ou sans remise. Exemples s'y ramenant.

05. Exemples d'étude de situations faisant intervenir la notion de probabilité conditionnelle.

06. Exemples d'organisation et gestion de données statistiques en collège.(*)(**)

07. Exemples d'organisation et d'étude d'une série statistique.
Détermination, comparaison, utilisation de mesures de tendance centrale (paramètres de position) et de mesures de dispersion (paramètres de dispersion).
Regroupements en classes. Représentations graphiques usuelles. (*)(**)

08. Exemples d'introduction à la fluctuation d'échantillonnage, notamment par le moyen de simulations. (*)(**)

09. Exemples de traitement d'une série statistique à deux variables numériques. Etude du nuage de points associé : point moyen, ajustement affine, droites de régression. (*)(**)

10. Exemples d'étude de séries de données en classe de Première (diagrammes en boîtes, données gaussiennes, séries chronologiques, effet de structure, …).(*)(**)

11. Exemples de modélisations et de simulations d'expériences aléatoires. (*)(**)

12. Exemples d'approches et d'applications du raisonnement par récurrence dans des domaines variés. (*)

13. Exemples d'étude, au niveau collège, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré. (*)

14. Exemples d'étude, dans les classes de Seconde et Première, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du second degré. (*)

15. Exemples d'étude de situations conduisant à des régionnements de la droite ou du plan à partir d'inéquations du premier et du second degré.

16. Exemples d'étude de situations conduisant à un système d'équations linéaires. (*)

17. Exemples d'étude, au niveau lycée, de situations conduisant à un système d'inéquations linéaires. Applications simples aux problèmes de programmation linéaire à deux variables.(**)

18. Exemples de mise en œuvre du calcul matriciel dans la série ES. (*)(**)

19. Exemples de modélisations de situations par un graphe au niveau de la Terminale ES. (*)(**)

20. Exemples de problèmes de constructions illustrant les notions de nombres constructibles et de commensurabilité.

21. Exemples de mise en œuvre des contenus des programmes relatifs aux pourcentages dans les classes de Première. (*)(**)

22. Exemples d'étude de configurations faisant l'objet de constructions géométriques à la règle et au compas.

23. Exemples de présentation et d'utilisation des angles orientés. Mise en évidence de l'intérêt de cette notion, à partir d'exemples d'utilisation dans le second cycle.

24. Exemples de recherches et de représentations de sections planes de solides usuels.

25. Exemples de représentations planes d'objets de l'espace : perspective cavalière, perspective à point de fuite.

26. Exemples de présentation, au niveau du lycée, de droites remarquables du tétraèdre : concours des médianes, condition de concours des hauteurs ; cas du tétraèdre régulier.

27. Exemples d'emploi, au niveau du lycée, de transformations pour l'étude de configurations du plan.

28. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes d'alignement et de concours dans le plan.

29. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes de constructions géométriques dans le plan.

30. Exemples de problèmes d'alignement et de concours portant sur le triangle.

31. Exemples de présentation, en fin de collège, d'activités récapitulatives sur les calculs de longueurs et de distances dans le plan.

32. Exemples de construction de triangles satisfaisant à des conditions métriques ou géométriques imposées.

33. Exemples d'utilisation de triangles isométriques ou de triangles de même forme (triangles semblables) pour l'étude de configurations du plan. Puis, étude de ces configurations à l'aide d'isométries ou de similitudes.

34. Exemples d'emploi du produit scalaire pour le calcul de distances, d'angles et d'aires dans les configurations usuelles du plan (triangles, polygones, ...).

35. Exemples d'emploi du produit scalaire et du produit vectoriel pour le calcul de distances, angles, aires, volumes, dans les configurations usuelles de l'espace (parallélépipède, tétraèdre, pyramide, ...).

36. Exemples d'emploi du produit scalaire pour la recherche de lieux géométriques dans le plan.

37. Exemples d'applications de différentes expressions du produit scalaire dans l'étude de configurations.

38. Exemples de démonstrations utilisant les aires.
Cas des démonstrations classiques : théorème de Pythagore, théorème de Thalès, …

39. Exemples d'emploi des nombres complexes dans des situations diverses issues des mathématiques, de la physique ...

40. Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude de configurations en géométrie plane.

41. Exemples d'emploi des nombres complexes *pour la recherche de lieux géométriques* définis dans le plan par des conditions de distances et d'angles.

42. Analyse comparée de différentes méthodes (calcul vectoriel, transformations, emploi d'un repère, nombres complexes, ...) pour la recherche d'un *même problème* de lieu géométrique du plan.

43. Analyse comparée de différentes méthodes (calcul vectoriel, transformations, emploi d'un repère, nombres complexes, ...) pour la recherche d'un *même problème* d'alignement ou d'orthogonalité dans le plan.

44. Exemples de présentations de polygones réguliers usuels s'appuyant sur les méthodes employées au collège et au lycée.

45. Exemples d'emploi des barycentres pour l'étude de configurations du plan et de l'espace ou la recherche de lieux géométriques.

46. Exemples de recherche et d'étude des isométries laissant invariante une configuration du plan.

47. Exemples de mise en œuvre de différentes méthodes (composition de transformations, nombres complexes, ...) pour la recherche des isométries ou des similitudes directes transformant une configuration usuelle donnée du plan en une autre (triangles, rectangles, ...).

48. Exemples d'emploi de similitudes directes du plan pour l'étude d'une configuration.

49. Exemples de présentation d'exercices sur les coniques (parabole, hyperbole, ellipse) au niveau du lycée.

50. Exemples d'emploi de transformations pour la recherche de lieux géométriques.

51. Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique ou de la physique conduisant à des courbes paramétrées.

52. Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites géométriques ou arithmétiques. (*)(**)

53. Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. (*)

54. Exemples de mise en œuvre de suites adjacentes pour la résolution de problèmes. (*)

55. Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre. (*)

56. Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique. (*)

57. Exemples de méthodes d'approximation du nombre π à l'aide de suites, et notamment de suites attachées aux polygones réguliers. (*)

58. Exemples de méthodes d'approximation du nombre e à l'aide de suites. Irrationalité du nombre e. (*)

59. Exemples de méthodes d'approximation, à l'aide de suites, du logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif ; exemples numériques. (*)

60. Exemples de méthodes d'approximation, à l'aide de suites, d'un nombre réel positif ; exemples numériques. (*)

61. Exemples d'étude de phénomènes exponentiels discrets ou continus issus de situations économiques, sociales ou scientifiques. (*)(**)

62. Exemples d'étude, aux niveaux collège et lycée, d'exercices mettant en évidence les possibilités et les limites d'une calculatrice. Chacun des exercices proposés devra faire appel à la calculatrice.

63. Exemples de problèmes conduisant à utiliser une calculatrice pour formuler une conjecture ou contrôler des résultats dans différentes situations mathématiques.
Chacun des exercices proposés devra faire appel à la calculatrice.

64. Exemples d'étude de situations conduisant à la mise en œuvre d'une démarche algorithmique au collège et en seconde. (*)

65. Exemples d'étude de situations conduisant à la mise en œuvre d'une démarche algorithmique au lycée. (*)

66. Exemples d'utilisation de formes usuelles du raisonnement (par condition nécessaire, par condition suffisante, par contraposition, par équivalence, par l'absurde, par disjonction des cas ...).

67. Exemples de présentation, en fin de collège, d'activités récapitulatives sur les notions de proportionnalité, de pourcentage, de fonction linéaire, de fonction affine. (*)(**)

68. Obtention, en classe de Première, de l'étude et de la représentation graphique de fonctions telles que $f+\lambda$, λf, $x \to f(x+\lambda)$, $x \to f(\lambda x)$, $|f|$, à partir de celle d'une fonction f.(*)

69. Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples. Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour obtenir des majorations et encadrements. (*)

70. Exemples d'étude du comportement local de fonctions (approximation par une fonction affine ...). Applications.(**)

71. Exemples de mise en évidence de la relation entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

72. Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale ...). (*)(**)

73. Exemples d'illustrations, à l'aide de contre-exemples, de l'importance de la vérification des hypothèses lors de l'emploi d'un théorème. (*)

74. Exemples d'étude du comportement asymptotique d'une fonction. Applications. (*)

75. Exemples d'emploi de la dérivation pour l'étude du sens de variation d'une fonction, du signe d'une fonction ou de la position relative de deux courbes.

76. Exemples d'utilisation de l'étude et de la variation des fonctions pour des problèmes d'optimisation en géométrie (longueurs, aires, volumes).

77. Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer ; exemples d'applications à l'obtention d'encadrements d'une fonction. (*)

78. Exemples de recherche de primitives par des méthodes variées.

79. Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales. (*)

80. Exemples de calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral. (*)

81. Exemples de calcul de volumes de solides usuels. (*)

82. Exemples d'étude de situations menant au calcul de la valeur moyenne d'une fonction ou de son carré. (*)

83. Exemples de présentation, en Terminale scientifique, d'exercices permettant de retrouver les formules données au collège pour des calculs d'aires ou de volumes.

84. Exemples d'emploi du calcul intégral pour le calcul de grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques. (*)

85. Exemples d'étude de situations (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale ...) *conduisant* à une fonction logarithme ou exponentielle.

86. Exemples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale menant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre, du second ordre.

87. Exemples de problèmes dont la résolution conduit à des calculs de PGCD ou PPCM de deux entiers naturels. (*)

88. Exemples de problèmes conduisant à la résolution, pour u et v entiers relatifs, d'équations du type : $au+bv = k$ où a, b, k sont des entiers relatifs. (*)

89. Exemples d'utilisation de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers. (*)

90. Exemples d'activités sur la nature et l'écriture des nombres en fin de collège et au niveau lycée. Nombres premiers. Applications. (*)

91. Exemples de présentation et d'utilisation de congruences, au niveau de la Terminale L et de la Terminale S. (*)(**)

3 . Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné.
A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique.
La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.

3.1 Commentaires sur la 1° épreuve orale

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa

préparation, sans document; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

- La présentation de la leçon dure 25 minutes, **sans interruption** du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que *durant cette période le jury souhaite que le candidat s'efforce de faire son exposé sans avoir systématiquement recours à ses notes.*

- La deuxième phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

  - ✓ rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

  - ✓ vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation. En effet, il serait illusoire de croire pouvoir présenter une leçon solide en se bornant à apprendre par coeur une liste de leçons toutes faites ; cette attitude s'avère être très préjudiciable pour le candidat qui se révèle en général dans l'incapacité de répondre à la moindre question du jury.

- Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

- ✓ la chronologie est essentielle, elle montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.

- ✓ Le statut des énoncés est fondamental : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc … Par exemple, bien que cela soit mathématiquement correct, il est maladroit d'énoncer globalement dans un plan « *Une suite croissante de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée* » En effet, la proposition «*Toute suite convergente est majorée* » est très élémentaire alors que la proposition «*Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente* » qui repose sur le théorème de la borne supérieure (fondement des nombres réels) est non triviale. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, un plan gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement ; le premier pouvant d'ailleurs servir de motivation pour l'étude du second. D'autre part, il est à noter que beaucoup de candidats parlent du « principe de récurrence » sans avoir conscience qu'il s'agit en fait

d'un théorème dont d'ailleurs bon nombre de candidats sont difficilement capables de fournir un énoncé correct. Rappelons à ce sujet qu'une théorie mathématique ne contient pas de « principe » (contrairement à une théorie physique) mais uniquement des axiomes, des définitions et des théorèmes.

- ✓

Les plans peuvent être enrichis :

- ✓ en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, leurs limites d'applications. Par exemple, beaucoup de candidats citent et démontrent les théorèmes de Ménélaus et Ceva sans pouvoir produire une seule application ! D'autres pensent qu'il est nécessaire d'utiliser le théorème général du point fixe (dans le cadre d'un espace vectoriel normé complet !) pour obtenir qu'une fonction contractante de $[a,b]$ dans $[a,b]$ admet un point fixe, ce qui montre pour le moins un certain manque de recul. D'autres encore donnent comme application du théorème dit « des gendarmes » le fait que la suite définie pour tout entier *n* non nul par $u_n = \frac{1}{n^2}$ converge vers 0 ! il n'est pourtant pas difficile de produire des exemples élémentaires mettant bien en évidence la puissance de ce théorème, à titre d'exemple nous les invitons à étudier la convergence des suites définies pour tout entier n non nul par $u_n = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{C_n^q}$ ou bien $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$
- ✓ en donnant de nombreuses applications, notamment des applications *transversales*. Par exemple, dans la leçon «*Racines n- ièmes de l'unité dans* ***C****- interprétation géométrique. Applications* » on peut proposer des applications arithmétiques, comme le calcul de la somme de certains coefficients binomiaux.

- Sur les démonstrations

Il devient de plus en plus fréquent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l'épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier *la pertinence* du choix des points démontrés par rapport au sujet et la *consistance* de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Par exemple, choisir de démontrer le théorème d'existence de la fonction réciproque d'une fonction continue, strictement monotone, sur un intervalle **I** et admettre dans le courant de la preuve la continuité de la fonction réciproque, est plus qu'une maladresse.

D'une manière générale, il est conseillé de :

- ✓ choisir le développement *de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet*, permettant de montrer son aptitude à mettre en oeuvre une certaine technicité liée aux notions étudiées .
- ✓ de montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief la (ou les) clef(s) de voûte des différentes preuves; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.

- ✓ de bien réfléchir à chaque étape des preuves que l'on devra exposer, afin qu'aucune subtilité ne passe inaperçue; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

- Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle* » il n'est pas acceptable de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait aucune idée sur la façon de prouver ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

Cette deuxième phase intervient pour une part très importante dans l'évaluation globale de cette épreuve. Par conséquent, elle ne doit pas être négligée par les candidats qui, bien au contraire, sont invités à s'y préparer de manière intensive.

3.2 Commentaires sur la 2° épreuve orale

Préparation de l'épreuve

Les candidats doivent être attentifs dans le choix de leurs exercices. Trop d'exercices hors sujet conduisent à une note inférieure à la moyenne. Il est préjudiciable, par exemple de proposer des problèmes de construction ou d'études de lieux dans un sujet concernant l'étude de configurations.

Un nombre important de candidats se contentent de recopier sans changement des exercices extraits de manuels ou d'annales d'examens. Ces exercices sortis de leur contexte pédagogique peuvent ainsi devenir totalement artificiels dans le cadre du sujet. La référence à un manuel ou à un examen ne justifie en rien le choix d'un exercice.

Si le candidat limite son choix à des exercices trop élémentaires, cela risque de l'empêcher de valoriser ses connaissances, de montrer qu'il maîtrise les bases théoriques et les concepts mathématiques mis en jeu.

Un choix original est valorisant. Un regard critique sur les exercices proposés dans les manuels scolaires est particulièrement appréciable, lorsqu'il devient judicieux de modifier l'énoncé pour mieux répondre à la problématique posée par le sujet.

Si les indications fournies en annexe ne sont ni exhaustives ni impératives il apparaît que peu de candidats prennent appui sur ces extraits de programme. S'il est normal que certains n'aient pas une connaissance fine des programmes, un minimum est attendu sur l'objectif des exercices choisis, les difficultés intrinsèques et des prolongements possibles ou des ouvertures à des généralisations.

La présentation des exercices

Le temps imparti permet largement de :

- Montrer une bonne compréhension du dossier.
- D'exposer les objectifs.
- Présenter les outils mis en jeu, les méthodes et les finalités des exercices.

Certains candidats cherchent à combler artificiellement le temps imparti en commentant ligne à ligne les exercices ou en les recopiant au tableau voire en développant l'exposé en le transformant en un exposé sur la notion mathématique liée au dossier. Ces pratiques n'apportent rien et risquent même d'être défavorables au candidat qui les emploie.

Durant cette présentation le jury essaie de repérer les capacités du candidat à communiquer. Une fiche d'exercices bien présentée, une orthographe correcte, une bonne élocution et une attitude dynamique sont des éléments appréciés. Il est regrettable de constater que beaucoup de candidats passent la majeure partie du temps d'exposé dos tourné au jury en recopiant leurs notes au tableau.

L'utilisation de transparents était autorisée cette année pour la première fois., encore peu pratiquée, cette technique peut permettre de disposer rapidement de figures claires, bien construites et est susceptible de valoriser la prestation du candidat.

IV. CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. A côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, le concours externe « donne le ton » pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle permet tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est tout à fait satisfaisante.

Plus délicat est le pilotage de l'évolution du concours.

L'introduction des TICE se heurte à de nombreux obstacles, tant matériels que docimologiques, et le passage d'une épreuve orale sur ordinateur n'est pas encore à l'ordre du jour. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs (trois constructeurs sont présents, Casio, Hewlett-Packard, Texas Instruments). L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative. Nous comptons poursuivre l'effort entrepris.

L'évolution des sujets doit suivre celle des programmes ; cependant, le choix proposé aux candidats a pour effet un délaissement de certaines parties des programmes « mal-aimées » par les candidats comme elles le sont parfois aussi, il faut le dire, par les membres du jury. Ceci contredit une évolution raisonnablement rapide des sujets réellement traités (et donc préparés) par les candidats. Même si le contenu mathématique de telle ou telle leçon reste mathématiquement inattaquable et intrinsèquement intéressant, il arrive qu'il faille s'en

séparer pour l'évaluation au concours, et faire apparaître de nouvelles directions présentes et encouragées dans les programmes. Le devoir du jury est de suivre aussi précisément que possible ces évolutions.

C'est pour ces raisons qu'il est actuellement envisagé une modification de la note définissant les épreuves orales , modification qui ne devrait prendre effet qu'en 2005. On peut donc considérer que la session prévue en 2004 se déroulera dans un cadre réglementaire identique à celui de la session 2003.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue, ainsi que tous nos partenaires du Ministère, du Lycée Lakanal et du SIEC pour leur efficacité et leur aide.

V. ANNEXES

5.1 Bibliothèque du C.A.P.E.S.

5.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n°2 du 30/08/01 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n°8 du 31/08/00 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n°3 du 31/08/01 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02/05/91 : Programme de 1ère SMS, STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique") et STL.
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de 1ère STI spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique".
B.O. hors série du 24/09/92 : Programme de 1ère STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n°3 du 30/08/01 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique").
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de Terminale STI spécialités "Art appliqués" et "Génie optique".
B.O.E.N. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale SMS.

5.1.2 Ouvrages de pédagogie (disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier)

- Méthodes en pratique. CRDP de Lille : Sixième, Cinquième, Quatrième, Troisième.
- Enseigner les mathématiques. CRDP d'Orléans.
- Les maths en pratique : Terminale C et E. Bordas.
- For Math :niveau lycée, 1ère et Terminale S. Ellipses
- Les maths en pratique : Première S. Bordas
- Les maths expliquées : cours de seconde. Ellipses
- Maths : seconde (méthode, soutien, approfondissement). Module Nathan
- Maths en seconde : énoncés et scénarios. Bulletin Inter-IREM.
- Liaison collège-seconde : Inter IREM, 1989-90
- Documents d'accompagnement : sixième. Par le Ministère de l'Education Nationale.

- Brochures IREM, selon le tableau ci-dessous :

OUVRAGES POUR LES COLLEGES	**IREM**	**DATE**
6ème entre fractions et décimaux	Lyon	Novembre 1999
Autour de Thalès	Commission INTER-IREM	
Gestion de données et statistiques au collège	Brest	Avril 1997
Des chiffres et des lettres	Inter IREM	1992
Le calcul littéral au collège	Poitiers	Janvier 1999
OUVRAGES POUR LES LYCEES	**IREM**	**DATE**
Arithmétique en terminale S	Clermont-Ferrand	Décembre 1998
Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée	Montpellier II	1998
Des activités mathématiques en classes scientifiques		
Aimer faire des mathématiques au lycée 5	Rouen	Juin 1998
Aimer faire des mathématiques au lycée 4	Rouen	Juin 1997
Aimer faire des mathématiques au lycée 3	Rouen	Juin 1996
Aimer encore faire des mathématiques 2	Rouen	Juin 1995
L'enseignement des statistiques et probabilités	Franche-Comté	1999
Enseigner les probabilités en classe de terminale	Strasbourg	Mars 1994
Enseigner les probabilités en classe de première	Strasbourg	2000
Probabilités et statistiques en classe de techniciens supérieurs	Strasbourg	1996
Probabilités et statistiques inférentielles	Reims	Octobre 1996
Des activités mathématiques en classes de scientifiques (1S et TS)	Montpellier II	1994
Géométrie dans l'espace activité pour classe de 2nd	Poitiers	Juin 1993
La géométrie plane au lycée	Poitiers	Mai 1989
Similitudes	Bordeaux I	1999
Mathématiques en filière économique et sociale	Poitiers	Octobre 1996
OUVRAGES GÉNÉRAUX	**IREM**	**DATE**
Enseigner les mathématiques. Fascicule 2	Poitiers	Janvier 1999
Pourquoi aimer encore faire des mathématiques ?	Rouen	Juin 1994
Histoire des mathématiques pour nos classes	Strasbourg	1991
Problèmes de mise en équation	Strasbourg	Janvier 1996
Prêt à affronter l'épreuve de mathématiques	Commission INTER-IREM	1998
La jubilation en mathématiques	Paris VII	Janvier 2001
Enseigner les mathématiques ?	Poitiers	Mai 1999
Pourquoi pas des mathématiques	Strasbourg	2000
Mathématiques. Tome 2	Paris VII	Janvier 1990
Mathématiques. Tome 3	Univ.Denis Diderot Paris VII	Juillet 2001
Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée	Grenoble	Novembre 2001
Informatique. Mathématiques	Strasbourg Université Louis Pasteur	1998
Enseigner la statistique du cours moyen à la 2ème	Lyon	Mars 1998
Des statistiques à la pensée statistique	Montpellier	2001
Mathématiques et sciences économiques et sociales	Strasbourg	1996
Angles. Rotations	Aquitaine	
Aires	Aquitaine	2000
Une histoire de coniques	Brest	Janvier 1997
Les coniques	Bordeaux	1997
Apport de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie	Commission INTER-IREM	1994
Algorithmique et traduction pour calculatrice et autres langages	Grenoble	Mai 2001
Cours de géométrie élémentaire	Pays de Loire	Juillet 1995
Exercices de géométrie élémentaire	Pays de Loire	Septembre 1995
Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée	Toulouse	N° 99
Fragments d'arithmétique	Montpellier II	Septembre 1999
Initiation à la cryptographie	Aquitaine	

Initiation à l'arithmétique	Bordeaux I	1999
Enseigner l'arithmétique	Poitiers	Juin 2000
Le nombre d'or...	Paris VII	1981
Petit x 4	Grenoble	1984
Petit x n° 40	Grenoble	1995-1996
Petit x n° 44	Grenoble	1990-1996
Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A 1ère année	Commission INTER-IREM	1990

5.1.3 Manuels scolaires (disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier)

Dans la colonne « REM », les indications ont les significations suivantes :
« PROF » : livre du professeur
« OPT » : option mathématique
« SP » : spécialité mathématique
« OBL » : enseignement obligatoire

COLLÈGE

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
6		MATHEMATIQUES	PROF			BELIN
6		DECIMALE				BELIN
6		MATH ET CLIC				BORDAS
6		NUL EN MATHS ?				BORDAS
6		PUISSANCE MATHS				BORDAS
6		MATHS				BORDAS
6		MATH ET CLIC	PROF			BORDAS
6		FAIRE DES MATHEMATIQUES				CEDIC
6		METHODES EN PRATIQUE				CRDP
6		MATHS				DELAGRAVE
6		DIMATHEME			2000	DIDIER
6		100 PROBLEMES SANS PEINE				HACHETTE
6		MATHEMATIQUES		DELORD VINRICH		HACHETTE
6		CINQ SUR CINQ				HACHETTE
6		PYTHAGORE			1990	HATIER
6		ALPHA				HATIER
6		TRIANGLE				HATIER
6		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
6		TRANSMATH			1996	NATHAN
6		TRANSMATH			1994	NATHAN
6		MATHEMATIQUES				NATHAN
6		CONNAÎTRE ET PRATIQUER LES MATHEMATIQUES				NATHAN
6		TRANSMATH VERT				NATHAN
5		DECIMALE				BELIN
5		MATHEMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS
5		DURRANDE NOUVELLE COLLECTION				BORDAS
5		MATHS JAUNE				BORDAS
5		PUISSANCE MATHS				BORDAS
5		METHODES EN PRATIQUE				CRDP
5		MATHEMATIQUES	PROF	CORRIEU		DELAGRAVE

				BATIER		
5		DIMATHEME			2001	DIDIER
5		DIMATHEME				DIDIER
5		CINQ SUR CINQ				HACHETTE
5		MATHEMATIQUES		DELORD VINRICH		HACHETTE
5		PYTHAGORE			1991	HATIER
5		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF			HATIER
5		TRIANGLE	PROF			HATIER
5		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
5		TRANSMATH			1997	NATHAN
5		TRANSMATH BLEU				NATHAN
4		DECIMALE				BELIN
4		MATHEMATIQUES				BORDAS
4		MEDIAMATH				BORDAS
4		FAIRE DES MATHEMATIQUES				CEDIC
4		METHODES EN PRATIQUE				CRDP
4		MATHEMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
4		DIMATHEME			2002	DIDIER
4		DIMATHEME			1998	DIDIER
4		MATHEMATIQUES		IREM LORRAINE		DIDIER
4		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
4		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
4		TOUT SIMPLEMENT				HACHETTE
4		MATHEMATIQUES		DELORD VINRICH		HACHETTE
4		EXERCICES CORRIGES				HACHETTE
4		MATHEMATIQUES		BAREIL ZEHREN		HACHETTE
4		DIABOLO				HACHETTE
4		PYTHAGORE			1992	HATIER
4		PYTHAGORE			1988	HATIER
4		TRIANGLE				HATIER
4		NOUVEAU PYTHAGORE				HATIER
4		TOUT LE PROGRAMME EN 300 EXERCICES				HATIER
4		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
4		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
4		TRANSMATH			1992	NATHAN
4		TRANSMATH			1988	NATHAN
4		NOUVEAU TRANSMATH				NATHAN
4		NOUVEAU TRANSMATH				NATHAN
3		MATHEMATIQUES				BELIN
3		COMPRENDRE ET REUSSIR				BELIN
3		MATHEMATIQUES		DURRANDE		BORDAS
3		METHODES EN PRATIQUE				CRDP
3		MATHEMATIQUES		CORRIEU DESNOYER		DELAGRAVE
3		DIMATHEME			1999	DIDIER
3		DE L'ENONCE A LA SOLUTION				DIDIER
3		CINQ SUR CINQ				HACHETTE
3		TOUT SIMPLEMENT				HACHETTE
3		MATHEMATIQUES		TERRACHER		HACHETTE
3		PYTHAGORE			1993	HATIER
3		PYTHAGORE	PROF			HATIER

3		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF			HATIER
3		TRIANGLE				HATIER
3		TRIANGLE	PROF			HATIER
3		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM		INTER IREM
3		MATHEMATIQUES		IREM STRASBOURG		ISTRA
3		TRANSMATH			1993	NATHAN
3		TRANSMATH				NATHAN

LYCÉE

Classes de seconde et BEP

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
2		SPIRALE				BELIN
2		MATHEMATIQUES				BELIN
2		INDICE			2000	BORDAS
2		FRACTALE				BORDAS
2		MATHEMATIQUES			2000	BREAL
2		ABC				BREAL
2		DIMATHEME			2000	DIDIER
2		DIMATHEME			1994	DIDIER
2		DIMATHEME	PROF			DIDIER
2		LES MATHS EXPLIQUEES				ELLIPSES
2		DECLIC				HACHETTE
2		PYRAMIDE			2000	HACHETTE
2		MATHEMATIQUES		TERRACHER		HACHETTE
2		PERSPECTIVES				HACHETTE
2		SIGMATH				HATIER
2		LIAISON COLLEGE SECONDE			1990	INTER IREM
2		ENONCES ET SCENARIOS				INTER IREM
2		MATHEMATIQUES		IREM STRASBOURG		IREM
2		MATHEMATIQUES				MAGNARD
2		FICHIER DE TD				MAGNARD
2		HYPERBOLE			2000	NATHAN
2		TRANSMATH			2000	NATHAN
2		TRANSMATH			1990	NATHAN
2		TRANSMATH			1987	NATHAN
2		TRANSMATH			1984	NATHAN
2		MODULES				NATHAN
2		MATHEMATIQUES				NATHAN
BEP	TERTIAIRE					FOUCHER
BEP	TERTIAIRE					NATHAN
BEP	INDUS-TRIEL					FOUCHER
BEP	INDUS-TRIEL					NATHAN

Classes de première

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
1	L	INDICE			2001	BORDAS
1	L	MATH INFO				DELAGRAVE
1	L	MANUEL DE MATHEMATIQUES				ELLIPSES
1	L	FICHES TD TP				ELLIPSES

1	L	MATH INFO			2003	HACHETTE
1	L	DECLIC			2001	HACHETTE
1	L	DECLIC			1999	HACHETTE
1	L	DECLIC			1993	HACHETTE
1	L	MATH INFO			2000	HATIER
1	L	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	ES	FRACTALE	OPT		1998	BORDAS
1	ES	MATHEMATIQUES	OPT		2001	BREAL
1	ES	DIMATHEME			2001	DIDIER
1	ES	DIMATHEME	OPT		2001	DIDIER
1	ES	DIMATHEME	OPT		1993	DIDIER
1	ES	DIMATHEME			1993	DIDIER
1	ES	DECLIC	OPT		2001	HACHETTE
1	ES	DECLIC			2001	HACHETTE
1	ES	DECLIC				HACHETTE
1	ES	DECLIC	OPT			HACHETTE
1	ES	DECLIC	OPT			HACHETTE
1	ES	TRANSMATH	OPT		2001	NATHAN
1	ES	HYPERBOLE	OPT		2001	NATHAN
1	ES	TRANSMATH			1998	NATHAN
1	ES	TRANSMATH	OPT			NATHAN
1	ES	HYPERBOLE				NATHAN
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BELIN
1	S	MATHEMATIQUES				BELIN
1	S	INDICE			2001	BORDAS
1	S	FRACTALE			2001	BORDAS
1	S	LES MATHS EN PRATIQUE				BORDAS
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BREAL
1	S	DIMATHEME			2001	DIDIER
1	S	GEOMETRIE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	DECLIC			2001	HACHETTE
1	S	ANALYSE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	ANALYSE		TERRACHER	1995	HACHETTE
1	S	GEOMETRIE		TERRACHER	1995	HACHETTE
1	S	DECLIC				HACHETTE
1	S	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	S	HYPERBOLE			2001	NATHAN
1	S	TRANSMATH			1991	NATHAN
1	SE	SPIRALE				BELIN
1	SE	FRACTALE				BORDAS
1	SE	CUBE				BREAL
1	SE	ANALYSE ET STATISTIQUES				COLIN
1	SE	GEOMETRIE				COLIN
1	SE	ANALYSE		TERRACHER		HACHETTE
1	SE	GEOMETRIE ET STATISTIQUES		TERRACHER		HACHETTE
1	SE	ANALYSE				MAGNARD
1	SE	GEOMETRIE ET STATISTIQUES				MAGNARD
1	SMS	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	SMS	DIMATHEME			1993	DIDIER
1	STI	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	STI	DIMATHEME			1993	DIDIER
1	STI	MATHEMATIQUES				HACHETTE
1	STT	INDICE				BORDAS
1	STT	DIMATHEME				DIDIER
1	STT	SIGMATH			2001	FOUCHER

1	STT	MATHEMATIQUES				HACHETTE

Classes de terminale et BTS

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
T	L	ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE			1999	HACHETTE
T	ES	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	ES	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	ES	MATHEMATIQUES			2002	BREAL
T	ES	MATHEMATIQUES			1998	BREAL
T	ES	DIMATHEME	SP		2002	DIDIER
T	ES	DIMATHEME	OBL		2002	DIDIER
T	ES	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER
T	ES	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	ES	DECLIC			2002	HACHETTE
T	ES	DECLIC			1998	HACHETTE
T	ES	DECLIC			1994	HACHETTE
T	ES	TRANSMATH			2002	NATHAN
T	ES	HYPERBOLE			2002	NATHAN
T	ES	MATHEMATIQUES			1998	NATHAN
T	ES	MATHEMATIQUES			1994	NATHAN
T	S	MATHEMATIQUES				BELIN
T	S	FRACTALE	SP		2002	BORDAS
T	S	FRACTALE	OBL		2002	BORDAS
T	S	INDICE	SP		2002	BORDAS
T	S	INDICE	OBL		2002	BORDAS
T	S	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE			1994	BORDAS
T	S	MATHEMATIQUES	SP		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	SP		1998	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		1998	BREAL
T	S	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER
T	S	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	S	DIMATHEME	SP		1994	DIDIER
T	S	DIMATHEME			1994	DIDIER
T	S	BAC AVEC MENTION				ELLIPSES
T	S	EXERCICES				ELLIPSES
T	S	FOR MATH				ELLIPSES
T	S	MATHEMATIQUES	SP	TERRACHER	2002	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	OBL	TERRACHER	2002	HACHETTE
T	S	DECLIC			2002	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	SP		1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	OBL		1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1996	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	SP	TERRACHER	1994	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	OBL	TERRACHER	1994	HACHETTE
T	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
T	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
T	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN

T	S	TRANSMATH	SP		1994	NATHAN
T	S	TRANSMATH	OBL		1994	NATHAN
T	CE	MATHEMATIQUES			1991	BELIN
T	CE	LES MATHS EN PRATIQUE				BORDAS
T	CE	FRACTALE				BORDAS
T	CE	ALGEBRE ET GEOMETRIE			1992	HACHETTE
T	CE	ANALYSE ET PROBABILITES			1992	HACHETTE
T	CE	GEOMETRIE			1983	HACHETTE
T	CE	PACK MATHS				MAGNARD
T	CE	MATHEMATIQUES			1992	NATHAN
T	CE	MATHEMATIQUES			1987	NATHAN
T	CE	MATHEMATIQUES			1983	NATHAN
T	SMS	DIMATHEME			1995	DIDIER
T	SMS	MATHEMATIQUES			1995	HACHETTE
T	STI	DIMATHEME			1997	DIDIER
T	STI	DIMATHEME			1994	DIDIER
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	HACHETTE
T	STI	MATHEMATIQUES			1992	HACHETTE
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	NATHAN
T	STT	FRACTALE			1994	BORDAS
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1999	DIDIER
T	STT	DIMATHEME			1999	DIDIER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1994	DIDIER
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1994	DIDIER
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1997	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1994	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1994	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			2002	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	HACHETTE
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	NATHAN
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1994	NATHAN
T	D	FRACTALE				BORDAS
T	D	CUBE				BREAL
T	D	MATHEMATIQUES				COLIN
T	D	DECLIC				HACHETTE
T	D	TRANSMATH				NATHAN
BTS	TERTIAIRE					FOUCHER
BTS	TERTIAIRE					HACHETTE
BTS	INDUS-TRIEL	ALGEBRE LINEAIRE				FOUCHER
BTS	INDUS-TRIEL	ANALYSE				FOUCHER

5.1.4 Ouvrages divers (disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier)

Auteur	Titre	Niveau	Editeur	Année
ABBOUD-AUDROING	Probabilités et inférence statistique		NATHAN	
ALAOUI A. El K.	Elements d'intégration et d'analyse		ELLIPSES	
ALESSANDRI M., EXBRAYAT J.M.	Thèmes d'analyse pour l'agrégation	Prépa. Agreg	MASSON	1997

BAKHVALOV	Méthodes numériques		MIR	
BIASI	Maths CAPES-AGREG nouvelle édition Physique-Chimie 2nde		ELLIPSES	
BIASI	Maths CAPES-AGREG. Géométrie		ELLIPSES	
BIASI	Maths CAPES-AGREG. Analyse		ELLIPSES	
BIGEARD A.	Géométrie : cours et exercices corrigés pour le CAPES et l'agrégation	Prépa. CAPES/Agreg	MASSON	1998
BLONDET	Mathématiques Sciences de la vie et de la Terre	DEUG	DUNOD	
BOSCHET F.	Exercices d'analyse : calcul intégral	DEUG & Licence	MASSON	1997
BOUTILLON	Best of mathématiques –2ème année – Toutes filières		DUNOD	
BOUTILLON ……	Système D - Analyse 400 méthodes et 450 exercices corrigés – Toutes filières		DUNOD	
BOUTILLON ……	Mathematica …….. et applications		DUNOD	
CALOT	Cours de calcul des probabilités		DUNOD	
CALOT	Exercices et calcul des probabilités		DUNOD	
CALVO A. & B.	Fonction d'une variable	DEUG & Licence	MASSON	1997
CARRAL	Géométrie		ELLIPSES	
CHABERT	Histoire d'algorithmes		BELIN	
CHEVALLET J. (sous la direction de)	34 problèmes corrigés de l'écrit du CAPES	Prépa. CAPES	VUIBERT	1998
CIARLET	Introduction à l'analyse numérique matricielle		MASSON	
CLERO	Epistémologie des mathématiques		NATHAN	
COLLET & GRISO	Le cercle d'Euler		VUIBERT Maths en plus	
COMBES	Suites et séries		PUF	
COUDERC	Le calendrier		PUF Que sais-je ?	
COUSIN-FAUCONNET A.	Enseigner la géométrie au collège		ARMAND COLIN	1995
DAVID R. et NOUR K.	Introduction à la logique			
DE-BIASI	Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation interne		ELLIPSES	
DELCOURT J.	La théorie des groupes			
DELMER F.	Les séries	DEUG	DUNOD	1995
DELMER F.	Fonctions de plusieurs variables	DEUG	DUNOD	1997
DELMER F.	Mathématiques	DEUG	DUNOD	1980
DESCHAMPS C. et al	Mathématiques 2e année "cours tout-en-un"			
DEUNAT-HEAULNE	TD – Algèbre générale	Deug MIAS-MASS		
DHOMBRES	Mathématiques au fil des âges		GAUTHIER VILLARS	
DIEUDONNE	Abrégé d'histoire des mathématiques		HERMANN	
DIEUDONNE	Calcul infinétisimal		HERMANN	
DIXMIER	Cours de mathématiques du premier cycle		GAUTHIER VILLARS	
DOUKHAN P. et	Agrégation de mathématiques			

SIFRE J.C.	Cours d'analyse			
DUMAS L.	Modélisation à l'oral de l'Agrégation		ELLIPSES	
DUMAS L.	Aux origines du calcul, infinilésimal		ELLIPSES	
DUVERNEY D.	Théorie des nombres	2ème cycle	DUNOD	1998
FRESNEL	Méthodes modernes en géométrie		HERMANN	
GAUTHIER-COLOMB	CAPES de Math. – nos 20 sujets préférés		DUNOD	
GAUTHIER-COLOMB	CAPES de Math. – Algèbre et géométrie (écrits 1996-1999)		DUNOD	
GAUTHIER-COLOMB	Géométrie affine et euclidienne		DUNOD	
GAUTHIER-COLOMB	Analyse et probabilités (écrits 1996-1999)		DUNOD	
GRAMAIN	Géométrie élémentaire		HERMANN	
HAUCHECORNE	Les contre-exemples en mathématiques		ELLIPSES	
LAURENT	Approximation et optimisation		HERMANN	
LEVY-BRUHL A. & P. PIQUET C., SERVIEN C. VAUTHIER J.	Algèbre et géométrie. Problème de Mathématiques, écrit du CAPES, 1979-1987	Prépa. CAPES	MASSON	1987
LEVY-BRUHL A. & P., PIQUET C., SERVIEN C. VAUTHIER J.	Analyse. Problèmes de Mathématiques, écrit du CAPES, 1979-1987	Prépa. CAPES	MASSON	1996
LAVILLE G.	Géométrie pour CAPES et Agrégation		ELLIPSES	
LIRET F., MARTINAIS D.	Math. pour le DEUG Algèbre 1ère année	DEUG	DUNOD	1997
LIRET F., MARTINAIS D.	Math. pour le DEUG Analyse 1ère année	DEUG	DUNOD	1997
LIRET F., MARTINAIS D.	Math. pour le DEUG Algèbre 2ème année	DEUG	DUNOD	1998
LOUQUET	Problèmes de mathématiques – Algèbre et géométrie		MASSON	
MARLE C. M., PILIBOSSIAN R.M.P.	Mathématiques, 2° cycle Cours et exercices corrigés		ELLIPSES	
MARLE C. M., PILIBOSSIAN R.M.P.	L'enseignement des maths au lycée		ELLIPSES	
MASCART-STOKA	Algèbre linéaire I et II		PUF	
MASIERI	Statistique et calcul des probabilités		SIREY	
MAZET	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation		ELLIPSES	
MELEARD S., PIQUET C., DESCOMPS-GUILLOUX A.	Analyse et probabilités. Problèmes de mathématiques. Ecrit du CAPES, 1990-1996	Prépa. CAPES	MASSON	1997
MONIER	2e cycle : Agrég. et écoles d'ingénieurs – Analyse Numérique			
MONIER	Mathématiques pour Deug - Analyse	2ème année DEUG MIA…-MA…-SM		
MONIER	2e cycle – Ecole d'ingénieurs Calcul Scientifique – Calcul différentiel			
MONIER	Géométrie cours et 400 exercices corrigés	1 et 2ème année MP PSI PC PT	DUNOD	
MONIER	Algèbre cours et exercices	1 et 2ème année MP PSI PC PT	DUNOD	
NICARSE	Analyse numérique et équations aux		DUNOD	

	dérivées partielles			
NIZARD	Méthodes mathématiques et programmation		TEC/DOC	
PARZYSZ B. et A.	Best of Deug : Analyse 1ère année		DUNOD	2001
PERRIN	Cours d'algèbre		ELLIPSES	
PROCHASSON D.	Mathématiques pour le Deug : Algèbre et géométrie	Deug 2e année		
QUEFFELEC H., ZUILY C.	Eléments d'analyse pour l'agrégation	Prépa. Agrég.	MASSON	1995
RAVIART-THOMAS	Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles		MASSON	
ROBERT	L'épreuve sur dossier : Géométrie		ELLIPSES	
ROBERT A.	Epreuve sur dossier : l'oral du CAPES de maths-géométrie		ELLIPSES	
ROBERT A.	Epreuve sur dossier : l'oral du CAPES de maths-analyse		ELLIPSES	
SCHMITT M.	Exercice d'analyse	DEUG	MASSON	1997
SCHWARTZ	Analyse		HERMANN	
SCHWARTZ	Méthodes Mathématiques de la Physique		HERMANN	
SENECHAL	Groupes et Géométries		HERMANN	
SKANDALIS G.	Mathématiques pour la licence : Topologie et analyse			
SORTAIS	Géométrie de l'espace et du plan.		HERMANN	
SORTAIS	Géométrie du triangle		HERMANN	
SOUBMI T. B.	Les olympiades de Maths		ELLIPSES	
SPIEGEL	Théorie et application de la statistique		SCHAUM	
TAUVEL P.	Algèbre pour l'agrégation interne	Prépa. CAPES/Agreg.	MASSON	1996
TAVEL	Agrégation de maths –Cours de géométrie		DUNOD	
TAVEL	Agrégation de maths – Cours d'Algébre		DUNOD	
THEDOR	Initiation à l'analyse numérique		MASSON	
WARUSFEL	Les nombres et leurs mystères		SEUIL	
	Eléments d'histoire des mathématiques		MASSON	
	Probabilités et statistiques. Tome 4, BTS-IUT		EYROLLES	
	Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique		MIR	
	Séries de Fourier, Transformation de Laplace	STS - IUT	ELLIPSES	1995
	Mathématiques pour le DEUG Algèbre et Géométrie 2° année	DEUG	DUNOD	2001
	Mathématiques pour la licence Topologie et Analyse	Licence	DUNOD	2001
	Théorie des groupes	2e cycle	DUNOD	2001
	Introduction à la logique	2e cycle	DUNOD	2001
	Cours d'analyse Analyse réelle et intégration	agrégation	DUNOD	2001
	Structures algébriques en géométrie	CAPES, agregation	ELLIPSES	1999
	" π ". Numéro spécial du Petit	.		

	Archimède			

5.1.5 Annales (disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier)

- Brevet : 89. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 00
- Baccalauréats :

AB : 90
AB. D. D' : 92; 93. 94
CE : 86. 90. 92. 93. 94
ES : 95. 97. 98.
F. G. H : 92. 93. 94
L : 96. 97. 98
S : 95. 96. 97. 98.
STT. STI. STL. SMS : 95. 96. 97. 98

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.
Il tient à mentionner tout particulièrement les maisons d'édition suivantes, qui ont fait preuve d'une grande générosité, et ont fourni gracieusement un nombre important de manuels parus en 2002 à l'occasion de la mise en œuvre des nouveaux programmes de terminale.

BREAL – DIDIER – DUNOD – MASSON – VUIBERT

5.2. Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n°13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.
Les modèles présents cette année étaient les suivants :

CASIO	fx 180 ;	fx 3900 P ;	fx 7900 GC ;		
	graph 20 ;	graph 65 ;	graph 100⊕ ;	graph 80 ;	graph 60 ;
HEWLETT-PACKARD	20 S ;	38 G ;	48 GX ;		
TEXAS INSTRUMENTS	TI 67 ;	TI 82 ;	TI 83⊕ ;	TI 89;	TI 92.

Pour la session 2003 les constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables:

CASIO	ensemble de rétroprojection RM 7000		
HEWLETT-PACKARD	40G ;	48GX	
TEXAS INSTRUMENTS	TI 89 ;	TI 92	TI Voyage 200

Les modèles anciens suivants ***ne seront plus proposés*** l'année prochaine :

CASIO	fx 180 ;	fx 3900 P ;	fx 7900 GC ;	graph 20 ;
HEWLETT-PACKARD	20 S ;	38 G ;	48 GX ;	
TEXAS INSTRUMENTS	TI 67 ;	TI 82 .		

Le jury remercie les constructeurs ainsi que le S.I.E.C. pour les prêts ou les dons qu'ils ont effectués.

On s'efforcera de proposer le même type de matériel, aussi moderne que possible, pour la session 2004, tant en calculatrices qu'en matériel de rétroprojection.

5.3. Complément sur l'épreuve sur dossier

Chaque dossier comporte une page de présentation et une annexe. On trouvera ci-dessous un modèle de page de présentation, suivi de quelques dossiers fournis à titre d'exemple.

La page de présentation prévue pour la session 2004 n'en différera pas de manière essentielle ; les seules modifications prévues viseront à la rendre encore plus facilement lisible.

CAPES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° X

Question :

Présenter un choix d'exercices sur le thème suivant :

Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.
(N.B. cette mention figure seulement sur certains dossiers ; voir la liste en partie **III.2***)*

A cette occasion, et en fonction des exercices qu'il a choisi de présenter, le candidat pourra être amené à montrer au jury « qu'il a réfléchi à la dimension civique de tout enseignement et plus particulièrement de celui de la discipline dans laquelle il souhaite exercer » (cf. BO n° 35 du 9 octobre 1997)
(N.B. cette mention figure seulement sur certains dossiers ; voir la liste en partie **III.2***)*

Consignes pour l'épreuve : (cf. BO n° spécial 5 du 21/10/1993).

Pendant votre préparation (deux heures), vous devez rédigez **sur les fiches mises à votre disposition**, un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve. Le terme « exercice » est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes au cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.
Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu.
Cet exposé est suivi d'un entretien (20 minutes minimum).

annexes :

Vous trouverez page suivante, en annexe, quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée.
Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives ; en particulier, les références au programme ne constituent pas le plan de l'exposé.

CAPES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 01

Question :

Présenter un choix d'exercices sur le thème suivant :

Exemples simples de problèmes de dénombrement dans différentes situations.

Consignes pour l'épreuve : (cf. BO n° spécial 5 du 21/10/1993)

Pendant votre préparation (deux heures), vous devez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition,** un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve. Le terme « exercice » est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu.

Cet exposé est suivi d'un entretien (20 minutes minimum).

Annexes :

Vous trouverez page suivante, en annexe, quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée.
Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives ; en particulier, les références aux programmes ne constituent pas le plan de l'exposé.

ANNEXE AU DOSSIER N° 01

Référence aux programmes :

Extraits du programme de Premières STI, STT :

Exemples simples d'emplois de partitions et de représentations (arbres, tableaux...) pour organiser et dénombrer des données (...).	L'étude du dénombrement des permutations, arrangements et combinaisons est hors programme.

Extraits du programme de Première L, Mathématiques-informatique :

Outils graphiques de dénombrement Diagrammes; arbres.	On découvrira, à travers deux ou trois exemples, quelques modes d'organisation des données en arbre ou en tableau permettant de résoudre facilement des problèmes simples.

Extraits du programme de Première L, option facultative :

Combinatoire Introduction des combinaisons par le triangle de Pascal. Notation $\binom{n}{p}$. Formule du binôme	Les calculs de $\binom{n}{p}$ pour des valeurs de n inférieures à 10 seront faits à partir du triangle de Pascal. On introduira la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. On proposera des dénombrements utilisant les combinaisons et des arbres.	On pourra utiliser le triangle de Pascal pour : - le décompte des parties de p éléments d'un ensemble à n éléments, - le calcul des coefficients de la décomposition de $(a + b)^n$. Le symbole $\binom{n}{p}$ sera désigné par la locution « p parmi n ».

Extraits du programme de Terminale S :

En terminale, l'objectif demeure modeste : il s'agit d'apprendre aux élèves à organiser quelques données combinatoires de base et à expliquer les règles de dénombrement figurant au programme pour l'étude de quelques exemples simples ... Dans les situations combinatoires étudiées, on mettra en valeur les aspects algorithmiques, mais la mise en forme de tels algorithmes est hors programme.

Extraits du programme de Terminale ES :

L'objectif est modeste ; il s'agit d'apprendre à organiser quelques données combinatoires de base (...) ; Exemples simples de problèmes de dénombrement.

Documentation conseillée :

Manuels de Premières STI, STT, L et de Terminales S, ES. Annales de baccalauréats.

CAPES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 31

Question :

Présenter un choix d'exercices sur le thème suivant :

Exemples de problèmes d'alignement et de concours portant sur le triangle.

Consignes pour l'épreuve : (cf. BO n° spécial 5 du 21/10/1993)

Pendant votre préparation (deux heures), vous devez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition,** un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve. Le terme « exercice » est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu.

Cet exposé est suivi d'un entretien (20 minutes minimum).

Annexes :

Vous trouverez page suivante, en annexe, quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée.
Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives ; en particulier, les références aux programmes ne constituent pas le plan de l'exposé.

ANNEXE AU DOSSIER N° 31

Référence aux programmes :

Extraits du programme de Cinquième :

Cercle Cercle circonscrit à un triangle.	Construire le cercle circonscrit à un triangle.	La caractérisation de la médiatrice (…) permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes (…).

Extraits du programme de Quatrième :

Triangles Droites remarquables d'un triangle.	Construire les bissectrices, les hauteurs, les médianes et les médiatrices d'un triangle ; en connaître une définition et savoir qu'elles sont concourantes.	Certaines de ces propriétés de concours pourront être démontrées ; (…) On pourra étudier la position du point de concours de la médiane sur chacune d'elles.

Extraits du programme de Seconde :

Proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège.

Extraits du programme de Première S :

Géométrie vectorielle Barycentre de quelques points pondérés dans le plan (…). Associativité du barycentre.	On utilisera la notion de barycentre pour établir des alignements de points, des points de concours de droites.	La notion de barycentre (…) illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera toute technicité.
Transformations Translations et homothéties dans le plan (…) ; effet sur l'alignement, le barycentre, (…) image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction (…).	Les transformations planes abordées en collège (…) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.

Extraits du programme de Terminale S :

Barycentres de n points dans le plan (....) : réduction d'une somme $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ dans chacun des cas $\sum \alpha_i \neq 0$ et $\sum \alpha_i = 0$.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser l'associativité de la barycentration.

Documentation conseillée :

Manuels de Quatrième, Troisième, Seconde, Première S, Terminale S. Annales du brevet, de baccalauréats.

CAPES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 64

Question :

Présenter un choix d'exercices sur le thème suivant :

Exemples d'étude de phénomènes exponentiels discrets ou continus issus de situations économiques, sociales ou scientifiques.

Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Consignes pour l'épreuve : (cf. BO n° spécial 5 du 21/10/1993)

Pendant votre préparation (deux heures), vous devez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition,** un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve. Le terme « exercice » est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu.

Cet exposé est suivi d'un entretien (20 minutes minimum).

A cette occasion, et en fonction des exercices qu'il a choisi de présenter, le candidat pourra être amené à montrer au jury « qu'il a réfléchi à la dimension civique de tout enseignement et plus particulièrement de celui de la discipline dans laquelle il souhaite exercer » (cf. BO n°35 du 09/10/1997).

Annexes :

Vous trouverez page suivante, en annexe, quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée.
Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives ; en particulier, les références aux programmes ne constituent pas le plan de l'exposé.

ANNEXE AU DOSSIER N° 64

Référence aux programmes :

Extraits de programmes :

<table>
<tr><td>Première S :
Suites géométriques.

Limite d’une suite géométrique.</td><td>Étude de l’évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. (...) On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d’un capital placé à taux constant, la période de désintégration d’une substance radioactive, etc.</td><td>On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.</td></tr>
<tr><td>Première ES :
(…) suites géométriques de raison positive ; somme des n premiers termes.</td><td></td><td>On parlera de croissance exponentielle pour des suites géométriques à termes positifs, de raison supérieure à 1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Première L : Mathématiques-Informatique
Suites géométriques ; croissance exponentielle
Exemples de suites ayant un accroissement relatif constant (…).</td><td>On pourra prendre comme exemple de référence l’étude de l’accroissement (ou diminution) d’une population ou l’évolution d’un capital placé à intérêts composés.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terminale ES :
Fonctions usuelles.
Fonctions logarithme népérien et exponentielle.
Fonction $x \mapsto a^x$ (…).

Exemples d’ajustement.</td><td>On pourra proposer des situations qui suggèrent des ajustements autres qu’affines. Ce pourra être l’occasion d’utiliser les papiers semi-log (..). On pourra exploiter sur des exemples des situations d’ajustements se ramenant à des ajustements affines. Mais aucune connaissance spécifique n’est exigible des élèves sur ces questions, et toutes les indications utiles doivent être données.</td></tr>
</table>

Documentation conseillée :

Manuels de Premières et Terminales L, S, ES. Annales de baccalauréats.

CAPES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 91

Question :

Présenter un choix d'exercices sur le thème suivant :

Exemples de problèmes dont la résolution conduit à des calculs de PGCD ou PPCM de deux entiers naturels.

Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Consignes pour l'épreuve : (cf. BO n° spécial 5 du 21/10/1993)

Pendant votre préparation (deux heures), vous devez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition**, un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve. Le terme « exercice » est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu.

Cet exposé est suivi d'un entretien (20 minutes minimum).

Annexes :

Vous trouverez page suivante, en annexe, quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée.
Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives ; en particulier, les références aux programmes ne constituent pas le plan de l'exposé.

ANNEXE AU DOSSIER N° 91

Référence aux programmes :

Extraits du programme de :

<table>
<tr><td colspan="2">Troisième :
Diviseurs communs à deux entiers

Fractions irréductibles</td><td>Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.
Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.</td><td>Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : (...). Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Première L, option facultative :
Commensurabilité et algorithme d'Euclide.</td><td>On posera le problème du pavage d'un rectangle avec des dalles carrées identiques les plus grandes possibles.
On fera le lien avec le calcul d'un PGCD.</td><td>On débouche ainsi de façon très naturelle sur des nombres n'ayant pas de « commune mesure » et donc sur les nombres irrationnels.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terminale S, enseignement de spécialité :
Division euclidienne et algorithme d'Euclide. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux entiers naturels. Entiers premiers entre eux.

Calculs de PGCD et PPCM.
Exemples de résolution dans Z d'équations du type $au + bv = d$, où d est le PGCD des entiers a et b.</td><td colspan="2">(…). Pour les déterminations de PGCD et PPCM, on évitera le recours systématique à la décomposition en facteurs premiers. On appliquera les résultats sur les entiers aux fractions : fractions irréductibles par exemple.

L'introduction de quelques exemples de problèmes de calendrier, de méthode de codage ou de cryptage, permet de familiariser les élèves avec les diverses notions du programme, à l'occasion d'applications concrètes, et non d'exiger d'eux la connaissance d'une liste d'algorithmes.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Terminale S :
Emploi des calculatrices programmables :
L'emploi des calculatrices programmables (...) en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique. Les élèves doivent savoir utiliser leur matériel personnel (...). Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :
• savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres ;
• (…) ;
• savoir recourir à une instruction séquentielle ou conditionnelle et, en classe de Terminale, à une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt.</td></tr>
</table>

Documentation conseillée :

Manuels de Troisième, de Terminale S.