PRÉSENTATION DE LA THÈSE

PARTIE 1. **Mots-clés : principe de Hasse, décidabilité, axiomatisation**

Principe de Hasse : Une variété satisfait le principe de Hasse non singulier dans un corps K relativement à une famille de valeurs absolues de K s'il suffit qu'elle ait un point lisse dans les complétés de K relativement à chacune de ces valeurs absolues pour qu'elle ait un point lisse à coordonnées dans K.

La variante de ce principe que nous considérons est la suivante : étant donné un anneau intègre A on considère l'ensemble W_A des anneaux de valuations contenant A, de même corps des fractions que A, et centrés sur les idéaux maximaux de A. On dit que A satisfait le LGPH si et seulement si :

(i) Pour tout $a \in A$, l'ensemble des idéaux maximaux de A ne contenant pas a est quasi-compact (cette propriété très générale n'est là que pour des raisons techniques).

(ii) Pour toute variété V définie sur le corps des fractions de A, il suffit pour que V ait un point lisse à coordonnées dans A qu'elle en ait un dans chacun des hensélisés des anneaux de valuation $R \in W_A$ (le fait de considérer des hensélisés au lieu des complétés n'est pas un affaiblissement, nous y reviendrons).

Décidabilité : Le dixième problème de Hilbert demandait s'il existait un algorithme permettant de dire, à partir des coefficients (pris dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs) d'un système d'équations polynômiales, si ce système avait ou non une solution dans $\mathbb{Z}$. Les logiciens appellent ce problème celui de la décidabilité équationnelle de l'anneau $\mathbb{Z}$. On sait que la réponse est non : cette question est indécidable.

Un anneau A est décidable s'il existe un algorithme qui détermine si une formule quelconque d'anneaux est ou non satisfaite dans A ; sinon il est indécidable. Les formules d'anneaux sont obtenues en combinant les équations polynômiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ à l'aide des opérations logiques habituelles (et, ou, négation, quantificateurs). En comparaison, la décidabilité équationnelle ne concerne que les formules obtenues à l'aide des équations, du quantificateur $\exists$ et de la conjonction "et", donc la décidabilté implique la décidabilité équationnelle.

Axiomatisation : Une propriété est axiomatisable dans le langage des anneaux si elle peut s'exprimer à l'aide de formules d'anneaux. Par exemple être fini, noethérien, principal ne sont pas des propriétés axiomatisables, tandis qu'être commutatif, intègre, de Bezout (tout idéal de type fini est principal) sont des propriétés axiomatisables.

Axiomatiser un anneau A c'est donner un ensemble de formules d'anneau, tel que toute propriété axiomatisable de cet anneau soit conséquence de ces formules. Il est équivalent de montrer qu'un anneau est décidable ou d'en donner une axiomatisation par un ensemble récursif de formules.

PARTIE 2. **Historique, et buts de la thèse**

Rumely [Ru 86] a montré que l'anneau $\mathbb{Z}^a$ de tous les entiers algébriques satisfaisait le principe local-global que nous avons nommé plus haut LGPH. Il en a déduit que cet anneau avait une théorie équationelle décidable : le dixième problème de Hilbert a une réponse positive pour $\mathbb{Z}^a$. Van den Dries [VdD 88] a étendu ce résultat et montré que $\mathbb{Z}^a$ était en fait décidable.

Moret-bailly [MB 89] a généralisé le théorème de rumely en montrant que de nombreux autres anneaux entiers sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{F}_p[T]$ satisfaisaient le LGPH. Parmi eux la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}_p$, dans le corps des nombres absolument p-adiques (*i.e.* les nombres algébriques dons tous les conjugués sont dans $\mathbb{Q}_p$) et la clôture intégrale $\mathbb{F}_p[T]^a$ de $\mathbb{F}_p[T]$ dans une clôture algébrique de son corps des fractions. Van den Dries et Macintyre [VdD-M 90] d'une part, Prestel et Schmid [P-S 91] d'autre part, ont utilisé ce résultat pour en déduire que les anneaux $\mathbb{F}_p[T]^a$, $\mathbb{Z}^a \cap \mathbb{R}$ étaient décidables.

Les principes locaux-globaux (LGP) du type du principe de Hasse non singulier jouent depuis des années un rôle important dans l'étude des corps par les théoriciens des modèles. Mais ces résultats récents montrent qu'il était possible et pertinent d'en considérer aussi pour les anneaux. Le principe local-global démontré par Moret-Bailly est en fait plus proche du principe de Hasse traditionnel que du LGPH : la première condition n'apparait pas, et dans la seconde les hensélisés sont remplacés par des complétés. Prestel et Schmid, tout comme van den Dries et Macintyre, ne considérent qu'une version affaiblie du LGPH (les points locaux étaient pris dans des prolongement à la clôture algébrique des hensélisés). Mais alors que van den Dries et Macintyre y ajoutent certaines propriétés auxiliaires, Prestel et Schmid préfèrent renforcer le principe local-global lui-même en y introduisant certaines conditions non algébriques. En somme, ils utilisent des principe locaaux-globaux assez différents, que nous appellerons respectivement LGP de Rumely et LGP de Prestel et Schmid.

L'idée de cette thèse est d'extraire le contenu modèle-théorique du théorème (purement algébrique) de Moret-Bailly, afin d'unifier et de généraliser ces différents LGP, et de les comparer aux LGP de corps. C'est ce qui nous a conduit au LGPH. Le but était de découvrir de nouvelles propriétés des anneaux auxquels s'appliquent ce théorème, résultats de décidabilité ou propriétés algébriques.

PARTIE 3. **Plan de la thèse**

Avertissement : La thèse a été rédigée de façon à pouvoir être lue sans connaître grand chose à la théorie des modèles. En particulier, la plupart des résultats ne requièrent rien de plus que les mots clés que nous avons rappelés plus haut. Néanmoins, le détail des arguments sera difficile à saisir pour un novice complet, même sous la forme allégée que nous donnons ici, ne serait-ce que parce que les notions classiques de plongement existentiellement clos ou d'équivalence élémentaire y occupent la première place. À défaut d'en être familier, on pourra toujours se reporter au récapitulatif des résultats donné dans la partie suivante.

Le premier chapitre introduit le principe local-global qui est au coeur de cette thèse, le LGPH. Pour cela on commence par présenter une adaptation naturelle au cadre des anneaux de la notion de clôture régulière introduite pour les corps par Ershov [E 92b]. Celle-ci permet d'expliciter la profonde signification logique des LGP, qu'ils soient de corps ou d'anneaux, à l'aide de la notion auxiliaire d'anneau géométriquement clos : on appelle ainsi tout anneau intègre A tel que pour toute variété V définie sur le corps des fractions de A et ayant un point lisse à coordonnées dans A, le plongement de A dans $A[V]$ est existentiellement clos. Il se trouve que tout anneau de valuation hensélien, tout corps valué hensélien, tout corps réel clos ou algébriquement clos est géométriquement clos (§I.1) et l'on a :

Proposition
Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et soit $\mathcal{R}$ une famille d'anneaux inclus dans une clôture algébrique de K et contenant tous A. Si tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont géométriquement clos, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *A est existentiellement clos dans tout anneau intègre B le contenant tel que l'extension $\mathrm{Fr}(B)|\mathrm{Fr}(A)$ soit régulière et que pour tout $R \in \mathcal{R}$ le plongement de R dans $R \otimes_A B$ soit existentiellement clos ;*

(ii) *Pour toute variété non vide V définie sur K, et pour tout polynôme g à coefficients dans A n'appartenant pas à $I(V)$, si V possède un point lisse dans tout $R \in \mathcal{R}$, alors V possède dans A un point n'annulant pas g.*

On définit alors au §I.2 les anneaux satisfaisant le LGPH (voir plus haut). Le théorème de Moret-Bailly, rappelé au §I.2, donne de nombreux exemples d'anneaux satisfaisant le LGPH. La suite du chapitre est consacrée à la comparaison du LGPH avec celui de Rumely et avec les LGP de corps (§I.3 et I.4). Il faudra attendre la fin du chapitre 3 pour faire de même avec le LGP plus sophistiqué de Prestel et Schmid (qui lui aussi apparaîtra comme un cas particulier du LGPH). Nous terminons par une digression d'intérêt plus général sur le principe de spécialisation locale (une terminologie que nous empruntons à Lang) au cours de laquelle nous démontrons par exemple :

Proposition
Soit F un corps valué henselien, F^c le complété de F relativement à cette valuation, et V une variété définie sur F.
Alors $V^\circ(F)$ est dense dans $V^\circ(F^c)$ (pour la topologie produit de la valuation).
En particulier, si V a un point lisse dans F^c alors elle en a un dans F.

Au chapitre 2 on démontre le résultat suivant, qui est fondamental car il va permettre d'appliquer au LGPH les outils de la théorie des modèles.

Proposition
"Satisfaire le LGPH" est une propriété axiomatisable.

La démonstration aurait pu être faite plus directement, mais sous l'influence des articles de Ershov [E 92a] sur les anneaux booléens, nous avons situé notre étude dans un cadre homogène, englobant le sien : celui des anneaux localement booléens. Nous les définissons comme les anneaux intègres A tels que pour tout élément a de A, non nul et non inversible, le localisé $S_a^{-1}A$ (où S_a est le complémentaire dans A de la réunion des idéaux maximaux de A contenant a) est booléen. Nous vérifions qu'ils conservent les propriétés les plus remarquables des anneaux booléens, comme d'être stables par clôture intégrale (un résultat que nous avons reporté au §III.2) ou de former une classe élémentaire (§II.2). Signalons aussi que pour un anneau localement booléen, les notions classiques d'approximation par blocs (BAP) et de bonne factorisation (BF) que nous avons empruntées à la littérature sont respectivement équivalentes à l'indépendance (la localisation par deux idéaux maximaux distincts donne des anneaux de valuation indépendants, *cf.* §II.3) et à la propriété de Bezout (tout idéal de type fini est principal, §II.4). C'est dans ce genre de réduction que réside tout le charme des anneaux localement booléens. Ils ont en outre l'avantage d'être considérablement plus répandus, puisque nous montrons par exemple aux §II.1 et II.3 :

Proposition
Tout anneau intégralement clos inclus dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_p(T)$ est localement booléen.
Tout anneau de Dedekind est localement booléen.

À titre de comparaison, les anneaux booléens inclus dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{F}_p(T)$ sont seulement les anneaux n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers. Nous n'avons pas exploité très à fond la notion d'anneau localement booléen, et il ne paraît pas douteux que l'on pourrait en poursuivant dans cette voie obtenir des résultats de théorie des modèles semblables à ceux bien connus sur les produits booléens de structures. Cependant, cela nous aurait emmené trop loin des préoccupations liées à notre sujet.

Le chapitre suivant culmine dans le théorème de clôture existentielle pour les anneaux satisfaisant le LGPH qui est le noeud gordien de notre thèse (§III.3). L'idée est que le LGPH, bien que purement géométrique dans sa définition, peut s'interpréter comme une propriété de clôture existentielle dans certaines extensions non seulement au sens des anneaux, comme le montrait la propriété de clôture régulière, mais même au sens d'une structure enrichie : celles

des r-anneaux, ou anneaux munis d'une relation radicale (une notion dûe à Prestel et Schmid). En application immédiate de ce résultat, nous vérifions au §IV.4 que le LGP de Prestel et Schmid est bien un cas particulier du LGPH.
En amont de ce résultat, et presqu'à titre de récréation, nous démontrons au §III.2 :

Proposition
Si un anneau A satisfait le LGPH, alors la clôture intégrale de A dans une extension quelconque de son corps de fractions satisfait encore le LGPH.

Cela n'est pas surprenant si l'on se souvient que les LGP de corps se transmettent aux extensions algébriques. La preuve est cependant plus délicate, car on ne dispose plus de bases pour les extensions d'anneaux comme on en avait pour les extensions de corps.

Avec le chapitre 4 on aborde le second versant de cette thèse : celui des applications. On commence par introduire les notions d'anneaux PAC, PRC et PC_M, généralisations immédiates des définitions homonymes pour les corps (§IV.1). Après quelques rappels et vérifications élémentaires (§IV.1 et IV.2) nous formulons pour ces anneaux des théorèmes de plongement (§IV.3 et IV.4) qui nous permettent au §IV.5 d'élucider totalement les propriétés modèles-théoriques fondamentales de ces anneaux sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes simples, caractérisant les plongements existentiellement clos, les plongements élémentaires, et la décidabilité. Pour cette partie, nous avons largement pioché dans la littérature classique sur les corps PAC, PRC ou PC_M, et il serait vain de vouloir faire la liste des nombreux auteurs envers qui nous avons ainsi contracté une dette (cette liste est à peu près égale à notre bibliographie).

Donner un exemple de ces théorèmes requière quelques définitions. Restreignons-nous au cas des anneaux pseudo algébriquement clos (PAC), c'est-à-dire aux anneaux qui satisfont le LGPH et dont le corps des fractions est PAC (un corps K est pseudo algébriquement clos si toute variété non vide — *i.e.* ayant des points dans une clôture algébrique de K — a un point dans K). Exemple : la clôture intégrale de $\mathbb{F}_p[T]$ dans tout corps séparablement clos est PAC, mais il y a des exemples plus élaborés en caractéristique nulle. La relation $a \leq b \iff M(a) \subseteq M(b)$ où $M(a)$ est l'ensemble des idéaux maximaux contenant a, définit un préordre sur un anneau A quelconque. L'ensemble ordonné quotient est appelé le treillis résiduel de A et noté $L(A)$.

Proposition
Deux anneaux PAC de même caractéristique positive sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs corps des fractions et leurs treillis résiduels sont élémentairement équivalents, et si aucun des deux n'est un corps (ou tous les deux sont des corps, mais ce dernier cas est trivial).

Cet énoncé est typique de ceux du chapitre IV : on ramène la théorie de l'anneau à celle de ces structures plus simples que sont son corps de fractions et son treillis résiduel, structures dont on connait bien les théories dans ce cas particulier. Dans la mesure ou l'on connait des exemples d'anneaux indécidables dont le corps des fractions est décidable, cette réduction est tout-à-fait non triviale. On voit d'ailleurs facilement sur cet énoncé comment construire un tel exemple : en fixant le corps des fractions (disons algébriquement clos) il suffit de s'arranger pour que le treillis résiduel soit assez compliqué (ce qui est toujours possible, voir plus loin). On a en effet :

Corollaire
Un anneau PAC de caractéristique positive est décidable si et seulement si son corps des fractions et son treillis résiduel sont décidables.

Les énoncés analogue en caractéristique nulle sont un peu plus compliqués car ils font intervenir un troisi´eme structure auxilaire (en plus du treillis résiduel et du corps des fractions) aussi ne les donnerons-nous pas ici. C'est en application de ces théorèmes sur les anneaux PAC, PRC ou PC_M que nous obtenons au §IV.6 les résultats de décidabilité de la clôture intégrale de $\mathbb{F}_p[T]$

dans tout corps séparablement clos, de divers sur-anneaux des entiers algébriques absolument réels (*i.e.* les entiers algébriques dont tous les conjugués sont réels), et enfin de l'anneau des entiers algébriques absolument p-adiques (modulo un résultat de Pop encore non publié). Nous avons aussi regroupé à la fin de ce quatrième chapitre les applications à l'algèbre que nous avons pu trouver, et notamment :

Proposition
Notons A la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{F}_p[T]$ dans un corps algébriquement clos. Alors pour tous $f_1, \ldots, f_m \in A[X_1, \ldots, X_n, Y]$ les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) *$\forall a \in A^n$, les $f_i(a, Y)$ ont un zéro commun dans A ;*
(ii) *il existe $f \in A[X_1, \ldots, X_n, Y]$, unitaire en Y, qui divise simultanément tous les f_i (dans $A[X_1, \ldots, X_n, Y]$).*

Le chapitre 5 qui termine ce travail regroupe d'autres résultats analogues à ceux du chapitre 4, mais nécessitant un formalisme plus détaillé. Ils montrent qu'avec le LGPH on peut axiomatiser des classes d'anneaux dont on a fixé les théories locales (sous des hypothèses satisfaites par tous les exemples envisageables), et obtenir pour les anneaux algébriquement maximaux appartenant à ces classes, des caractérisations simples des plongements existentiellement clos ou élémentaires, et de la décidabilité. En application nous obtenons le résultat qui fut l'un des premiers objectifs de notre thèse :

Proposition
La clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$ est décidable

Ce résultat est annoncé par Prestel et Schmid [P-S 91], mais leur démonstration comporte une erreur ; c'est en voulant la corriger que nous avons été amenés à introduire le LGPH.

La plupart de nos résultats de décidabilité viennent de ce qu'on ramène la théorie de l'anneau considéré à celle de structures plus simples, dont des treillis distributifs d'un genre particulier : les quasi-algèbres de Boole. Encore faut-il pour les applications connaître des quasi-algèbres de Boole décidables. Comme aucune référence publiée n'existe sur la question, nous avons dû nous fendre d'une annexe pour vérifier que les quasi-algèbres de Boole denses étaient décidables (la démonstration est essentiellement la même que pour le résultat analogue bien connu sur les algèbres de Boole). Signalons aussi que toute quasi-algèbre de Boole peut être représentée comme le treillis résiduel d'un anneau satisfaisant le LGPH, et l'on peut imposer à peu près ce que l'on veut sur le corps des fractions. Comme il existe bien évidemment des quasi-algèbres de Boole indécidables, cela signifie qu'il existe des anneaux qui satisfont le LGPH et sont néanmoins indécidables (c'est une remarque triviale pour un logicien, mais qui pourra surprendre un algébriste).

PARTIE 4. **Récapitulatif des principaux résultats**

(1) “Satisfaire le LGPH” est une propriété axiomatisable.

(2) Si un anneau intègre satisfait le LGPH, alors sa clôture intégrale dans n'importe quelle extension satisfait le LGPH.

(3) La clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$ ou dans le corps de nombres algébriques absolument p-adiques est décidable.

(4) La clôture intégrale de $\mathbb{F}_p[T]$ dans tout corps séparablement clos est décidable (et une CNS simple est donnée pour la décidabilité des localisés de cet anneau).

(5) Pour tout nombre premier p, la clôture intégrale de $\mathbb{Z}[1/p]$ dans le corps de nombres algébriques absolument réel est décidable. (Rappelons que la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans

ce même corps est connue pour être indécidable.)

(6) On retrouve les résultats connus antérieurement sur la décidabilité de la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

(7) En plus de (2), nous obtenons deux applications à l'algèbre dont celle-ci, pour laquelle il n'existe pas à ce jour de preuve purement algébrique : en notant A la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{F}_p[T]$ dans un corps algébriquement clos, on montre qu'étant donnés $f_1, \ldots, f_m \in A[X_1, \ldots, X_n, Y]$, les $f_i(\alpha, Y)$ ont une racine commune dans A pour tout $\alpha \in A^n$ si et seulement s'il existe un polynôme unitaire en Y qui divise dans $A[X_1, \ldots, X_n, Y]$ tous les f_i simultanément.

BIBLIOGRAPHIE

[Ru 86] Rumely, *Arithmetic over the ring of all algebraic integers*, J. reine angew. Math. **368** (1986) 127-133.

[VdD 88] L. van den Dries, *Elimination theory for the ring of all algebraic integers*, J. reine angew. Math. **388** (1988) 181-194.

[MB 89] L.Moret-Bailly, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem II*, Ann. scien. Ec. Norm. Sup. (4) **22** (1989) 181-194.

[VdD-M 90] L. van den Dries, A. Macintyre, *The logic of Rumely's local-global principle*, J. reine angew. Math. **407** (1990) 33-56.

[P-S 91] A.Prestel, J.Schmid, *Decidability of the rings of real algebraic and p-adic algebraic integers*, J. reine angew. Math. **414** (1991) 141-148.

[E 92a] Y. L. Ershov, *Boolean families of valuation rings*, Algebra and Logic **31** (1992) 170-181.

[E 92b] Y. L. Ershov, *Relative regular closeness and π-valuations*, Algebra and Logic **31** (1992) 342-360.