Variantes *p*-adiques de la *o*-minimalité

Luck Darnière

19 mai 2015

1. Minimalité
   - RCF et o-minimalité
   - *p*CF et *p*-minimalité
   - Questions
2. Optimalité
   - *p*-optimalité
   - Décomposition cellulaire
3. Simplicité
   - *p*-simplicité
   - Isomorphismes

2 - Minimalité

RCF=Th($\mathbf{R}, \mathcal{L}_o$) où $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{ann} \cup \{<\}$.

Théorème (Tarski, 1948)

RCF *élimine les quanteurs.*

$(K, \mathcal{L})$ enrichissement de $(K, \mathcal{L}_o) \models (\mathrm{RCF})_\forall$.

- $A \subseteq K^m$ semi-algébrique s'il est $\mathcal{L}_o$-définissable sans quanteur.
- $(K, \mathcal{L})$ o-minimal si tout $\mathcal{L}$-définissable $A \subseteq K$ est semi-algébrique.
- Th$(K, \mathcal{L})$ o-minimale si tout $(K', \mathcal{L}) \equiv (K, \mathcal{L})$ est o-minimal.

2 - Minimalité

Théorème (Pillay-Steinhorn, 1986)

$(K, \mathcal{L})$ *o-minimal* $\Rightarrow (K, \mathcal{L}_o) \models \mathrm{RCF}$.

Théorème (Knight-Pillay-Steinhorn, 1986)

$(K, \mathcal{L})$ *o-minimal* $\Rightarrow \mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ *o-minimale.*

Remarque

Dans les corps o-minimaux on a aussi des fonctions de Skolem définissables, une décomposition cellulaire, une triangulation, une classification des isomorphismes par la dimension et la caractéristique d'Euler-Poincarré...

2 - Minimalité

$p\mathrm{CF} = \mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{Mac})$ où $\mathcal{L}_{Mac} = \mathcal{L}_{ann} \cup \{|, (P_N)_{N\geq 1}\}$.

- $a|b \Leftrightarrow v(a) \leq v(b)$.
- $P_N = \{a \in K \;/\; \exists b \in K,\; a = b^N\}$.

Remarque

Si $(K, \mathcal{L}_{Mac}) \models (p\mathrm{CF})_\forall$ tout $A \subseteq K^m$ $\mathcal{L}_{Mac}$-définissable sans quanteur est combinaison booléenne de $\{x \in K^m \;/\; f(x) \in P_N\}$ avec $f \in K[X_1, , \dots, X_m]$.

Théorème (Macintyre, 1976)

pCF *élimine les quanteurs dans* $\mathcal{L}_{Mac}$.

2 - Minimalité

$(K, \mathcal{L})$ enrichissement de $(K, \mathcal{L}_0) \models (p\mathrm{CF})_\forall$.

- $A \subseteq K^m$ semi-algébrique si $\mathcal{L}_{Mac}$-définissable sans quanteur.
- $(K, \mathcal{L})$ *p*-minimal si tout $\mathcal{L}_{Mac}$-définissable $A \subseteq K$ est semi-algébrique.
- $\mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ *p*-minimale ou (K, L) *P*-minimal si tout $(K', \mathcal{L}) \equiv (K, \mathcal{L})$ est *p*-minimal.

Théorème (Haskell-Macpherson, 1997)

Si $\mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ *est p-minimale et* $v(K^\times) \equiv \mathbf{Z}$ *alors* $(K, \mathcal{L}_{Mac}) \models p\mathrm{CF}$.

Dans la suite on supposera toujours $v(K^\times) \equiv \mathbf{Z}$.

Exemple

Tout modèle de $p\mathrm{CF}$ est P-minimal (*cf.* Macintyre).

2 - Minimalité

$\mathbf{Q}_p\{X_1, \ldots, X_n\} = \{f \in \mathbf{Q}_p[[X_1, \ldots, X_n]] \,/\, \forall x \in \mathbf{Z}_p^n,\ f(x) \text{ CV } \}$.
Chaque $f \in \mathbf{Q}_p[[X_1, \ldots, X_n]]$ est prolongée par 0 en dehors de $\mathbf{Z}_p^n$.

$D(x, y) = x/y$ si $y \neq 0$ et $y|x$, $D(x, y) = 0$ sinon.

$\mathcal{L}_{an}^D = \mathcal{L}_{Mac} \cup \{D\} \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}^\times} \mathbf{Z}_p\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Théorème (Denef-Dries, 1988)

1. $\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{an}^D)$ *élimine les quanteurs.*
2. $(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{an}^D)$ *est p-minimal.*

Théorème (Dries-Haskell-Macpherson, 1999)

$\mathrm{Th}(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{an}^D)$ *p-minimale.*

2 - Minimalité

Pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, et tout $x = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$ on pose $\pi_I^m(x) = (x_i)_{i \in I}$.

Pour tout $S \subseteq K^m$, $\dim S = \max\{\text{Card } I \;/\; \operatorname{Int} \pi_I^m(S) \neq \emptyset\}$.

Théorème (Haskell-Macpherson, 1997)

Si $(K, \mathcal{L})$ *alors :*

1. $\dim S_1 \cup \cdots \cup S_r = \max_{i \leq r} \dim S_i$.
2. *Si* $f : A \subseteq K^m \to K^n$ *est définissable alors* $\operatorname{Int}(A \setminus \mathcal{C}(f)) = \emptyset$, *où* $\mathcal{C}(f) = \{x \in X \;/\; f$ *continue au voisinage de* $x\}$.
3. acl *vérifie le lemme de l'échange (d'où un* « rk »*).*
4. *Pour tout définissable* $A \subseteq K^m$, $\dim A = \operatorname{rk} X$.

2 - Minimalité

Questions

Les propriétés suivantes sont-elles vraies si $(K, \mathcal{L})$ est p-minimal ?

1. $\dim \overline{A} \setminus A < \dim A$.
2. Si $f : A \subseteq K^m \to K^n$ est définissable alors $\mathcal{C}(f)$ dense dans A.
3. Toute fonction définissable est continue par morceaux.
4. (Additivité) Si pour tout $x \in f(A)$, $\dim f^{-1}(\{x\}) = k$ alors $\dim A = k + \dim f(A)$.
5. (Skolem) Pour tout définissable $S \subseteq K^m \times K^n$ la projection $(x, t) \mapsto x$ restreinte à S admet une section définissable.
6. Tout définissable $A \subseteq K^m$ est réunion finie de « cellules ».
7. $(K, \mathcal{L})$ est P-minimal.

2 - Minimalité

Questions

Les propriétés suivantes sont-elles vraies si $(K, \mathcal{L})$ est p-minimal ?

1. $\dim \overline{A} \setminus A < \dim A$.
2. Si $f : A \subseteq K^m \to K^n$ est définissable alors $\mathcal{C}(f)$ dense dans A.
3. Toute fonction définissable est continue par morceaux.
4. (Additivité) Si pour tout $x \in f(A)$, $\dim f^{-1}(\{x\}) = k$ alors $\dim A = k + \dim f(A)$.
5. (Skolem) Pour tout définissable $S \subseteq K^m \times K^n$ la projection $(x, t) \mapsto x$ restreinte à S admet une section définissable.
6. Tout définissable $A \subseteq K^m$ est réunion finie de « cellules ».
7. $(K, \mathcal{L})$ est P-minimal.

Oui, si $(K, \mathcal{L})$ est « p-optimal » !

3 - Optimalité

$(K, \mathcal{L})$ enrichissement de $(K, \mathcal{L}_{Mac}) \models (p\mathrm{CF})$.

- $f : K^m \to K$ est basique si elle est poynomiale en x_m à coefficients définissables en $(x_1, \ldots, x_{m-1})$.
- $A \subseteq K^m$ est basique s'il est combinaison booléenne de $\{x \in K^m \,/\, f(x) \in P_N\}$ où f est basique.
- $(K, \mathcal{L})$ est *p*-optimal si tout $A \subseteq K^m$ est basique.

3 - Optimalité

$(K, \mathcal{L})$ enrichissement de $(K, \mathcal{L}_{Mac}) \models (p\mathrm{CF})$.

- $f : K^m \to K$ est basique si elle est poynomiale en x_m à coefficients définissables en $(x_1, \ldots, x_{m-1})$.
- $A \subseteq K^m$ est basique s'il est combinaison booléenne de $\{x \in K^m \,/\, f(x) \in P_N\}$ où f est basique.
- $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal si tout $A \subseteq K^m$ est basique.

Remarque

1. Si $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal alors il est p-minimal.

3 - Optimalité

$(K, \mathcal{L})$ enrichissement de $(K, \mathcal{L}_{Mac}) \models (p\mathrm{CF})$.

- $f : K^m \to K$ est basique si elle est poynomiale en x_m à coefficients définissables en $(x_1, \ldots, x_{m-1})$.
- $A \subseteq K^m$ est basique s'il est combinaison booléenne de $\{x \in K^m \,/\, f(x) \in P_N\}$ où f est basique.
- $(K, \mathcal{L})$ est *p*-optimal si tout $A \subseteq K^m$ est basique.

Remarque

1. Si $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal alors il est p-minimal.
2. La p-optimalité est *intrinsèque* : elle ne suppose pas la P-minimalité, ni rien d'autre sur les $(K', \mathcal{L}) \equiv (K, \mathcal{L})$.

3 - Optimalité

Théorème

Si $(K, \mathcal{L})$ est P-minimal et a des fonctions Skolem définissables alors $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal.

Remarque

Tous les corps p-minimaux connus sont P-minimaux et ont des fonctions de Skolem définissables. Ils sont donc tous p-optimaux.

3 - Optimalité

Soient $\mu, c, \nu : X \subseteq K^m \to K$ des fonctions définissables et $\lambda \in K$. L'ensemble des $(x,t) \in K^m \times K$ tels que

$$v(\mu(x)) \leq v(t - c(x)) \leq v(\nu(x)) \text{ et } t - c(x) \in \lambda P_N^\times$$

est appelé une cellule de K^{m+1}.

Théorème

Si $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal alors tout définissable de K^m est union finie de cellules disjointes.

Corollaire

Tout corps p-optimal a des fonctions de Skolem définissables.

3 - Optimalité

Théorème

Si $(K, \mathcal{L})$ *est p-optimal alors* $\mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ *est p-minimale.*

3 - Optimalité

Théorème

Si $(K, \mathcal{L})$ *est p-optimal alors* $\mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ *est p-minimale.*

En résumé, sont équivalents :

- $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal.
- Tout définissable de K^m est union finie de cellules disjointes.
- $(K, \mathcal{L})$ est P-minimal et a des fonctions de Skolem définissables.

4 - Simplicité

- $f : X \subseteq K^m \to K$ est simple s'il existe un entier $e \geq 1$, une partition finie $\mathcal{B}$ de X en parties basiques et pour chaque $B \in \mathcal{B}$ des fonctions basiques $p_B, q_B : K^m \to K$ telles que pour tout $x \in B$, $q_B(x) \neq 0$ et

$$v(f(x)) = \frac{1}{e} v\left(\frac{p_B(x)}{q_B(x)}\right)$$

- $(K, \mathcal{L})$ est *p*-simple si toute fonction définissable est *p*-simple.
- $\mathrm{Th}(K, \mathcal{L})$ est *p*-simple ou $(K, \mathcal{L})$ est *P*-simple si tout $(K', \mathcal{L}) \equiv (K, \mathcal{L})$ est *p*-simple.

Remarque

$(K, \mathcal{L})$ *p*-simple $\Rightarrow$ $(K, \mathcal{L})$ *p*-optimal.

4 - Simplicité

Exemples (Denef)

- Toute fonction semi-algébrique est simple.
- Toute fonction unaire définissable dans $(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{an}^D)$ est simple.
- $(\mathbf{Q}_p, \mathcal{L}_{an}^D)$ est P-simple. (CLuckers)

Remarque

f unaire sur un corps p-minimal est simple si et seulement s'il existe g semi-algébrique telle que $v(f(x)) = v(g(x))$ pour tout x.

Proposition

Si $(K, \mathcal{L})$ est p-optimal alors $(K, \mathcal{L})$ est p-simple si et seulement si ses fonctions unaires définissables sont simples.

$A \subseteq K^m$ et $B \subseteq K^n$ sont isomorphes s'il existe une bijection définissable $f : A \to B$.

Remarque

Si $(K, \mathcal{L})$ est P-minimal et A, B sont isomorphes alors $\dim A = \dim B$.

Théorème

Si $(K, \mathcal{L})$ est p-simple alors $A \subseteq K^m$ et $B \subseteq K^n$ infinis sont isomorphes ssi $\dim A = \dim B$.