(Co)dimension dans les algèbres (co)Heyting

Luck Darnière Markus Junker

10 novembre 2009

Tous nos treillis sont distributifs avec extrémités.
$\mathcal{L}_{lat} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \vee, \wedge\}$.

$$b \leq a \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = a$$

Une partie $\mathfrak{p}$ de L est un filtre premier si :

1. $\emptyset \neq \mathfrak{p} \neq L$.
2. $a \wedge b \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$ et $b \in \mathfrak{p}$.
3. $a \vee b \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

$\mathrm{Spec}\, L$= { filtres premiers de L}.
La topologie de Zariski sur $\mathrm{Spec}\, L$ est engendrée par la famille des $F(a)^c$, où a décrit L :

$$F(a) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, L \,/\, a \in \mathfrak{p}\}$$

Propriété (Dualité de Stone-Priestley)

L est isomorphe au treillis des $F(a)$:

$$F(b) \subseteq F(a) \iff b \leq a$$

En particulier $F(\mathbf{0}) = \emptyset$, et $F(a \vee b) = F(a) \cup F(b)$.

Propriété

$\mathrm{Spec}\, L$ est un espace spectral.

Pour tout filtre premier $\mathfrak{p}$ de L on pose :

- $\mathrm{ht}\ \mathfrak{p}$ = rang de fondation $\mathfrak{p}$
- $\mathrm{coht}\ \mathfrak{p}$ = rang de co-fondation de $\mathfrak{p}$

Pour tout a dans L on pose :

- dim $a = \sup\{\mathrm{coht}\,\mathfrak{p} \;/\; \mathfrak{p}$ filtre premier, $a \in \mathfrak{p}\}$
- codim $a = \min\{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \;/\; \mathfrak{p}$ filtre premier, $a \in \mathfrak{p}\}$

L est de dimension finie si tous ses éléments sont de dimension finie.

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

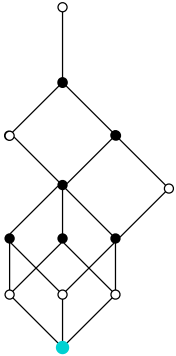


FIG.: $\dim \mathbf{0} = -\infty$

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

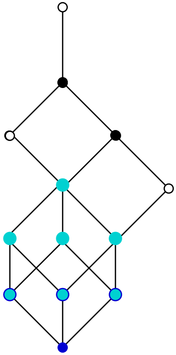


Fig.: Points de dimension 0

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

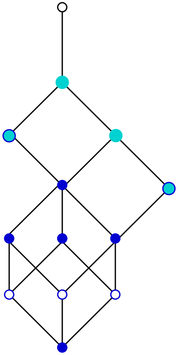


FIG.: Points de dimension 1

Propriété

$$\begin{aligned} \dim a \vee b &= \max(\dim a, \dim b) \\ \operatorname{codim} a \vee b &= \min(\operatorname{codim} a, \operatorname{codim} b) \end{aligned}$$

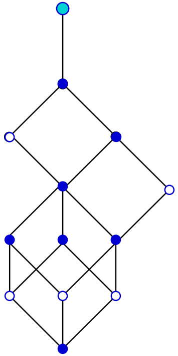


FIG.: Points de dimension 2

Exemple

L = treillis des fermés de Zariski dans l'espace affine k^n sur un corps k infini. Pour tout $A \in L$, (co)dim$A$ coincide avec la (co)dimension usuelle de A (dans k^n).
$A - B$=adhérence de $A \setminus B$ appartient à L.

Un TC-treillis est un treillis muni d'une operation supplémentaire $a - b = \min\{c \,/\, a \leq b \vee c\}$.

Propriété

Dans un treillis quelconque :

$$c = a - b \iff F(c) = \overline{F(a) \setminus F(b)}$$

Une algèbre de Heyting est un treillis muni d'une opération supplémentaire $b \to a = \max\{c \mid c \wedge b \leq a\}$.

Remarque

L est de Heyting ssi son dual est un TC-treillis.
TC-treillis = algèbre co-Heyting = treillis de Brouwer.

Lemme

Pour tout $d \in \mathbb{N}$ il existe des formules positives existentielles ϕ_d, ψ_d du langage des TC-treillis, telles que pour tout TC-treillis L et tout $a \in L$:

$$\dim a \geq d \iff L \models \varphi_d(a)$$

$$\operatorname{codim} a \geq d \iff L \models \psi_d(a)$$

Dans tout TC-treillis L posons :

$$\delta_L(a,b) = 2^{-\operatorname{codim}_L(a-b)\vee(b-a)}$$

Propriété (Triangle ultrametric inequality)

$$\delta_L(a,c) \leq \max \delta_L(a,b), \delta_L(b,c)$$

δ_L est une pseudo-métrique, donc définit une topologie sur L.
δ_L est une distance (ultramétrique) ssi sa topologie est séparée.
Nous dirons alors que L est séparé.

Le complété $\widehat{L}$ de L pour δ_L est l'ensemble des classes d'équivalences de suites de Cauchy.

Propriété

Toute application de L^n dans L de la forme $x \mapsto t(x)$, où t est un terme à n variables, est 1-lipschtizienne, donc uniformément continue.

La structure de TC-treillis de L se prolonge de manière unique à $\widehat{L}$ par continuité uniforme, ce qui fait de $\widehat{L}$ une TC treillis.

Lemme

Le prolongement de δ_L à $\widehat{L}$ coïncide avec $\delta_{\widehat{L}}$.

Théorème

Le complété de L est aussi la limite projective de tous les quotients de L de dimension finie.

Remarque

$dL = \{a \,/\, \operatorname{codim} a \geq d\}$ est un idéal de L, pour tout $d \in \mathbb{N}$.
Les quotients L/dL forment un système projectif, et :

$$\widehat{L} \simeq \varprojlim (L/dL)_{d<\omega}$$

corollaire

Toute suite monotone à valeurs dans un compact de $\widehat{L}$ est convergente.

3 - Précompacité

Un TC-treillis L est précompact si son complété est compact.

corollaire

L est précompact ssi L/dL est fini pour tout d.
Dans ce cas, $\widehat{L}$ est aussi la complétion profinie de L.

Remarque

Un TC-treillis profini L est n'est pas forcément compact pour la topologie définie par δ_L, il l'est seulement pour la topologie profinie.

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. **L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. **Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. $L \setminus dL$ **n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. *dL* **et** *$d\widehat{L}$* **sont principaux, de même générateur.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. *dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, de même générateur.*
5. **Tout élément a de L est borne inférieure de l'ensemble des inf-irréductibles $x \geq a$.**

Théorème

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

1. *L et $\widehat{L}$ ont les même éléments complètement sup- (resp. inf-) irréductibles.*
2. *Tout élément sup-irréductible de L est complètement sup-irréductible.*
3. *$L \setminus dL$ n'a qu'un nombre fini d'éléments complétement sup- (resp inf-) irréductibles.*
4. *dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, de même générateur.*
5. *Tout élément a de L est borne inférieure de l'ensemble des inf-irréductibles $x \geq a$.*
6. **Tout élément a de L se décompose en composantes sup-irréductibles (en nombre infini).**

Théorème

Pour toute variété $\mathcal{V}$ de TC-treillis, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{V}$ a la propriété du modèle fini.*
2. *Tout TC-treillis libre dans $\mathcal{V}$ est séparé.*
3. *Tout TC-treillis finiment présenté dans $\mathcal{V}$ est séparé et précompact.*

corollaire

Tout TC-treillis finiment engendré est précompact.
Tout TC-treillis de présentation finie est séparé précompact.

Théorème

Il existe un terme $t_{n,d}(x)$ tel que pour tout TC-treillis L engendré par un n-uplet a, l'idéal dL est principal et engendré par $t_{n,d}(a)$.

Question 1

Soit L un TC-treillis séparé précompact.

A-t-on : $L \leq_\exists \widehat{L}$? $L \preccurlyeq \widehat{L}$?

$\mathcal{F}_n$ = le TC-treillis libre à n générateurs.

Théorème

$\mathcal{F}_n$ possède un unique ensemble de générateur. Il est définissable dans $\mathcal{F}_n$ et dans $\widehat{\mathcal{F}}_n$ par la même formule.

corollaire

Si $\mathcal{F}_n \equiv \widehat{\mathcal{F}}_n$ alors $\mathcal{F}_n \preccurlyeq \widehat{\mathcal{F}}_n$

corollaire

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe $2^{\aleph_0}$ TC-treillis séparés précompacts engendrés par n éléments, qui n'admettent aucune présentation finie.

4- Densité et scission

L'ordre fort $\ll$ est défini sur L par :

$$b \ll a \iff b \leq a \text{ and } a - b = a$$

C'est un ordre strict sur $L \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Exemple

$L =$ TC-treillis des fermés de Zariski de k^n.
$B \ll A$ ssi B est d'intérieur vide dans A.

Propriété

Dans tout TC-treillis L, $\dim a$ est le rang de fondation de a dans $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ pour l'ordre fort $\ll$.

Considérons les deux axiomes suivants.

- Densité (D1)
  Si $c \ll a \neq \mathbf{0}$ alors il existe $b \neq \mathbf{0}$ tel que :
  $$c \ll b \ll a$$
- Scission (S1)
  Si $b_1 \vee b_2 \ll a \neq \mathbf{0}$ alors il existe a_1, a_2 non nuls tels que :
  $$\begin{aligned} a - a_2 = a_1 &\geq b_1 \\ a - a_1 = a_2 &\geq b_2 \\ a_1 \wedge a_2 &= b_1 \wedge b_2 \end{aligned}$$

Remarque

Comme $a_1 \vee a_2 = (a - a_2) \vee a_2 = a$ le second axiome permet de scinder a en deux parties a_1, a_1 le long de b_1, b_2 (d'où son nom).

$L =$ TC-treillis des semi-algébriques réels de $\mathbb{R}^2$.

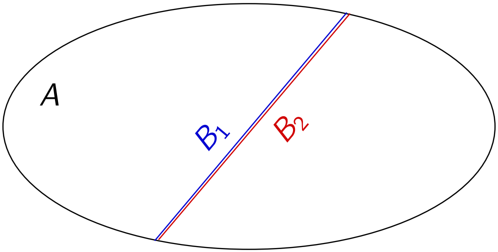


Fig.: Scission d'une ellipse A le long de $B_1 = B_2$

Remarque

Comme $a_1 \vee a_2 = (a - a_2) \vee a_2 = a$ le second axiome permet de scinder a en deux parties a_1, a_1 le long de b_1, b_2 (d'où son nom).

$L =$ TC-treillis des semi-algébriques réels de $\mathbb{R}^2$.

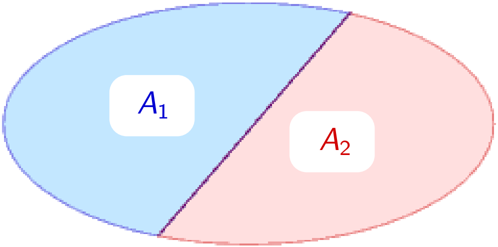


FIG.: Scission d'une ellipse A le long de $B_1 = B_2$

Remarque

Pour pouvoir scinder A le long de B_1, B_2 dans L, il est nécessaire (mais non suffisant) que $A \setminus (B_1 \cup B_2)$ ne soit pas connexe.

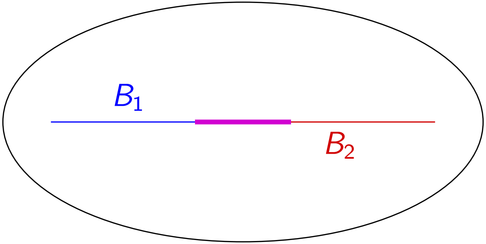
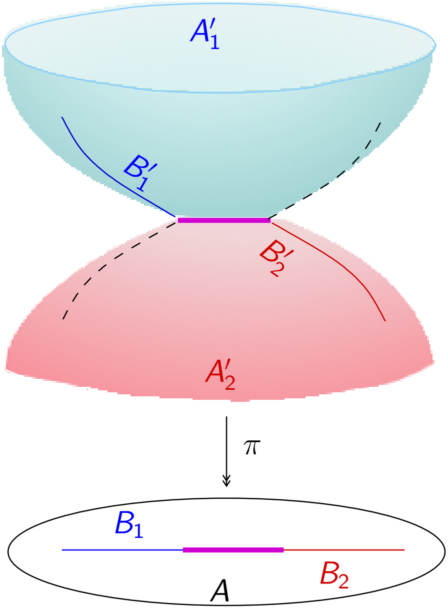


FIG.: Pas de scission possible... dans L


A'_1
B'_1
B'_2
A'_2
π
B_1
B_2
A

L'application $f : A \in L \mapsto \pi^{-1}(A)$ plonge L dans un TC-treillis L' où l'image de A peut se scinder le long des images B_1', B_2' de B_1, B_2 :

$$f(A) = \pi^{-1}(A) = A_1' \cup A_2'$$

Théorème

Tout TC-treillis se plonge dans une extension satisfaisant les axiomes de densité et de scission D1 et S1.

corollaire

Tout TC-treillis existentiellement clos satisfait les axiomes de densité et de scission D1 et S1.

Théorème

Soient L_1, L_2, L des TC-treillis. Si L_2 est fini et si L satisfait les axiomes D1, S1 alors tout plongement de L_1 dans L se prolonge en un plongement de L_2 dans L.

$$
\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[rr, hook, dotted] & & L \\
& L_1 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Question 2

Si L_1, L_2 sont finiment engendrés et que L satisfait les axiomes D1, S1, peut-on prolonger tout plongement de L_1 dans L en un plongement de L_2 dans une extension élémentaire de L ?

5- Modèle complétion

Théorème (L. Maksimova)

Il existe exactement 8 variétés de TC-treillis ayant la propriété d'amalgamation.

Remarque

- Ces variétés sont les seules dont les théories $T_1, \dots, T_8$ peuvent admettre une modèle complétion.
- On peut oublier T_8 (dont le seul modèle est le TC-treillis réduit à un point) et T_7 (théorie des algèbres de Boole) dont la modèle complétion est bien connue.

Théorème (A. Pitts)

Le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre est interprétable dans celui du premier ordre.

Théorème (A. Pitts, S. Ghilardi, M. Zawadowski)

Chacune des théorie $T_1, \ldots, T_6$ admet une modèle complétion.

Ingrédients de la preuve :

- La propriété d'amalgamation de $T_1, \ldots, T_6$.
- Le théorème de Pitts pour T_1 (la théorie des TC-treillis), et une variante de son théorème pour T_2.
- Du « model-theoretic non-sense » pour $T_3, \ldots, T_6$, basé sur le fait que ces théories sont localement finies.

Remarque

Aucune axiomatisation intuitive de ces modèle complétion n'a été donnée à ce jour.

Pour chaque entier k de 1 à 6, nous introduisons deux axiomes Dk, Sk variantes adaptées à T_k des axiomes de densité et de scission D1, S1 de T_1.

Théorème

Tout modèle existentiellement clos de T_k satisfait les axiomes de densité et de scission Dk, Sk.

Théorème

Soient L_1, L_2, L des modèles de T_k. Si L_2 est fini et si L satisfait les axiomes Dk, Sk alors tout plongement de L_1 dans L se prolonge en un plongement de L_2 dans L.

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[rr, hook, dotted] & & L \\ & L_1 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Comme tout modèle finiment engendré de T_k est fini pour $k = 3, 4, 5, 6$ il s'en suit immédiatement :

corollaire

Pour $k = 3, 4, 5, 6$ la théorie T_k a une modèle complétion, qui est axiomatisée par Dk, Sk.

Comme tout modèle finiment engendré de T_k est fini pour $k = 3, 4, 5, 6$ il s'en suit immédiatement :

corollaire

Pour $k = 3, 4, 5, 6$ la théorie T_k a une modèle complétion, qui est axiomatisée par Dk, Sk.

Notons $\mathcal{L}_k$ la logique superintuitioniste correspondant à la variété d'algèbre de Heyting dont les duales sont les modèles de T_k.

corollaire

Le calcul propositionnel du second ordre de $\mathcal{L}_k$ est interprétable dans celui du premier ordre.

Références

- Codimension and pseudometric in co-Heyting algebras (arXiv :0812.2026) *À paraitre dans Algebra Universalis*
- On Bellissima's construction of the finitely generated free Heyting algebras, and beyond (arXiv :0812.2027) *Soumis*
- **Model completion of equational theories of co-Heyting algebras** (Bientôt sur Arxiv) *Cherche journal...*