Correction du second contrôle continu

Encore une fois, ceci n'est qu'une correction possible : toute autre solution correctement argumentée est valable.

Exercice 1 (10 points) **:** 1. Compléter le tableau suivant sans justification :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2. Mettre sous forme algébrique et exponentielle les complexes suivants :
On effectue les calculs suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(1+i\sqrt{3}) \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}}2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2e^{i\pi} \textit{ qui est sa forme exponnentielle} \\ &= -2 \textit{ qui est sa forme algébrique.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -2e^{i\frac{29\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{29\pi}{4}} \\ &= -8e^{i\pi\frac{29\times4+29\times3}{12}} \\ &= 8e^{i\pi}e^{i\pi\frac{203}{12}} \\ &= 8e^{i\pi\frac{215}{12}} \\ &= 8e^{i\pi\frac{11}{12}} \textit{ qui est sa forme exponnentielle} \\ &= 8\cos\frac{11\pi}{12} + 8i\sin\frac{11\pi}{12} \textit{ qui est sa forme algébrique.} \end{aligned}$$

3. A l'aide du produit $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
D'un coté on a $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi\frac{4-3}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ *et de l'autre on a* $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}$ *et donc par unicté de l'écriture algébrique on obtient bien* $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

4. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et en déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
   On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \Re(e^{i2\theta})\\ &= \Re\left((e^{i\theta})^2\right)\\ &= \Re\left((\cos\theta + i\sin\theta)^2\right)\\ &= \Re(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= 2\cos^2\theta - 1.\end{aligned}$$

   Ainsi pour $\theta = \frac{\pi}{12}$ on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$ et comme $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ on obtient $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
5. S'assurer qu'il n'y a pas de contradiction.
   Pour s'assurer de l'égalité de ces deux réels positifs, il suffit de s'assurer de l'égalité de leur carrés, or $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ *et* $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{2+6+2\sqrt{2}\sqrt{6}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ *qui sont bien égaux.*
6. Exprimer plus simplement $\arccos\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}\right)$.
   En appliquant la formule $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$ valable pour $\frac{\pi}{24}$ et $\frac{\pi}{48}$ on obtient successivement

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\textit{puis}\ \cos\frac{\pi}{48} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{24}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

   et donc $\arccos\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}\right) = \frac{\pi}{48}$
7. Linéariser $\sin^3\theta\cos\theta$.

On calcule pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta\cos\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\
&= \frac{1}{-16i}(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta})(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\\
&= \frac{1}{-16i}(e^{4i\theta}-3e^{2i\theta}+3-e^{-2i\theta}+e^{2i\theta}-3+3e^{-2i\theta}-e^{-4i\theta})\\
&= \frac{1}{-16i}(e^{4i\theta}-e^{-4i\theta}-2e^{2i\theta}+2e^{-2i\theta})\\
&= \frac{1}{-16i}(2i\sin 4\theta - 4i\sin 2\theta)\\
&= \frac{1}{-8}(\sin 4\theta - 2\sin 2\theta)
\end{aligned}$$

8. Résoudre l'équation $z^2+az+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$. On discutera le nombre de solutions réelles suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

   Pour résoudre cette équation du second degré on calcule son discriminant $\Delta = a^2 - 4$ qui est nul (resp : strictement positif, strictement négatif) pour $a = \pm 2$ (resp : $|a| > 2$), $|a| < 2$) et admet alors pour solution ∓ 1 (resp : $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ et $\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $\frac{-a+i\sqrt{4-a^2}}{2}$ et $\frac{-a-i\sqrt{4-a^2}}{2}$).

EXERCICE 2 (6 points) **:**
Soit $(u_n)_n$ une suite strictement décroissante de réels strictement positifs et convergeant vers 0. On note $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_n$.

   La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ convient.

2. Montrer que $(s_{2n})_n$ est décroissante et que $(s_{2n+1})_n$ est croisssante.

   Calculons d'abord $s_{2(n+1)} - s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ car $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi, $(s_{2n})_n$ est bien décroissante. Ensuite on calcule de même $s_{2(n+1)+1} - s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^k u_k - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$ car $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi, $(s_{2n+1})_n$ est bien croissante.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $s_{2n+1} - s_{2n} = -u_{2n+1}$ qui tend vers 0 car extrait de la $(u_n)_n$.

4. En déduire que $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ convergent vers une limite commune.

   On commence par justifier l'existence de ces limites grâce au théorème de la limite monotonne : la monotonnie a déjà été traitée et il ne reste plus qu'à borner ces suites or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{2n+1} \leqslant s_{2n}$ car $u_n \geqslant 0$ et donc $s_1 \leqslant s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant s_0$. Notant l et l' leur limite respective on à $l - l' = 0$ en passant à la limite dans $s_{2n+1} - s_{2n} = -u_{2n+1}$.

5. Que dire de $(s_n)_n$ quand $n \to +\infty$?
On peut affirnmer que $(s_n)_n$ *tend vers* l *car pour* $\varepsilon > 0$ *on dispose d'un rang* $N \in \mathbb{N}$ *(resp :* N'*) à partir duquel les termes pairs (resp : impairs) sont* ε*-proches de* l*. Ainsi pour tout* $n \geqslant \max\{N, N'\}$ *on a bien* $|s_n - l| \leqslant \varepsilon$ *et ce quelque soit* $\varepsilon > 0$*.*

Exercice 3 (6 points) :
On se propose d'étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

1. Justifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(u_n)_n$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre que u_n *existe et est positif pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Pour* u_0 *c'est donné en énnoncé. Supposons maintenant que cela est vrai pour un certain* $n \in \mathbb{N}$*. Alors en particulier* $u_n \neq -1$ *et donc* $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ *existe. Par ailleurs, on a alors* $1 + u_n > 0$ *et son inverse, ie.* u_{n+1} *est également positif.*
2. Tracer le graphe de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et les valeurs de u_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (on s'aidera du tracé de la première bissectrice). Calculer les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
Il s'agit d'un graphe faisant apparaitre une « spirale ». Pour les calculs, on a successivment $u_1 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+0} = 1$, $u_2 = \frac{1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{1+u_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{1}{1+u_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ *et enfin* $u_5 = \frac{1}{1+u_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'admet qu'une seule solution, notée l, dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = x \Leftrightarrow 1 = x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ *équation du second degrée dont le discriminant vaut* 5 *et dont les racines réels sont* $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *dont seule la première est positive.*
4. En observant le dessin, que conjecturer sur le comportement asymptotique de $(u_n)_n$?
Sur le dessin, ici cruellement absent, on observe que la suite semble converger vers ce point fixe.
5. Montrer qu'on a pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x) - l| = \frac{|x-l|}{|1+x||1+l|} \leqslant \frac{|l-x|}{2}$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x) - l| = |f(x) - f(l)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+l}\right| = \left|\frac{1+l-1-x}{(1+x)(1+l)}\right| \leqslant \frac{|x-l|}{|1+x||1+l|} \leqslant \frac{2}{3}|l - x|$ *où la dernière égalité provient du fait que* $|1 + x| \geqslant 1$ *et* $|1 + l| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \geqslant \frac{3}{2}$ *avec une erreur sur la constante* $\frac{1}{2}$ *de l'énnoncé : déjà pour* $x = 0$ *on a* $\frac{|x-l|}{|1+x||1+l|} \leqslant \frac{|l-x|}{2} \Leftrightarrow |1 + l| \geqslant 2$ *ce qui est faux.*
6. Montrer proprement que $(u_n)_n$ tend vers l.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leqslant \frac{2}{3}|l - u_n|$ *et donc par récurrence immédiate* $|u_{n+1} - l| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |l - u_0|$ *qui tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$ *ce qui prouve que* $(u_{n+1})_n$ *et donc* $(u_n)_n$ *tend bien vers* l*, comme conjecturé.*