

Régularité de le connexion de Gauss Manin

Céline Roucairol

Table des matières

1	Représentant de Milnor	4
1.1	Introduction	4
1.2	Submersions propres et fibrations lisses localement triviales.	5
1.3	Transversalité.	9
1.3.1	cas d'une singularité isolée:	10
1.3.2	Cas d'une singularité non isolée.	12
1.4	Exemples de fibrations lisses localement triviales.	13
1.5	Remarques sur le théorème de Milnor.	15
1.5.1	La fibration ne dépend pas de ϵ et de η	15
1.5.2	$X(\epsilon, \eta)$ est contractile.	17
1.5.3	$f^{-1}([0, t]) \cap B_\epsilon$ est contractile avec $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit.	18
1.5.4	Dans le cas d'une singularité isolée, le nombre de Milnor est fini.	19
2	Connexion de Gauss Manin.	20
2.1	Collection de classes de cohomologie localement constante.	20
2.2	Le fibré de Gauss Manin.	23
2.2.1	L'espace étalé \mathcal{E}	23
2.2.2	$\pi : GM \rightarrow D^*$ fibré vectoriel plat.	24
2.3	Connexion de Gauss Manin.	25
2.3.1	Le faisceau des sections holomorphes de GM	25
2.3.2	Connexion de Gauss Manin.	26
2.3.3	Monodromie.	26
3	Le faisceau HDR.	28
3.1	Complexe de De Rham holomorphe.	28
3.1.1	Cohomologie de De Rham d'une variété réelle.	28
3.1.2	Complexe de De Rham holomorphe.	30
3.2	Complexe de De Rham holomorphe sur une variété de Stein.	32
3.2.1	Variété de Stein.	32
3.2.2	Complexe de De Rham holomorphe sur une variété de Stein.	33
3.3	Cohomologie de De Rham relative et faisceau HDR	36
3.3.1	Cohomologie de De Rham relative.	36
3.3.2	Faisceau HDR	39

4	Etude comparée de GM et HDR.	41
4.1	Isomorphisme entre les sections holomorphes de GM et la restriction du faisceau HDR à D^*	41
4.2	Commutation du passage à la cohomologie et de la limite inductive.	44
4.3	L'application $H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p)$ est une surjection pour tout $p \in \{0, \dots, n+1\}$	45
4.4	w $d_{X/D}$ -fermée implique que $dw = df \wedge \alpha$ globalement.	45
4.5	La suite $HDR \rightarrow HDR \rightarrow i_*(H^n(X(s_0), \mathbb{C})) \rightarrow 0$ est exacte.	47
4.6	Démonstration de l'isomorphisme entre les sections holomorphes de GM et la restriction de HDR à D^*	51
5	Régularité de la connexion de Gauss Manin.	55
5.1	Préliminaires.	55
5.2	Construction d'une connexion sur le faisceau HDR	56
5.3	Les $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules $'H$ et $''H$	58
5.3.1	Définition du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module $'H$	58
5.3.2	Utilisation du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module $'H$ pour le calcul de la dimension des fibres du fibré de Gauss Manin dans la cas où $n \geq 1$	58
5.3.3	Définition du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module $''H$	61
5.3.4	Ecriture de $\tilde{\nabla}$ dans $'H$ et $''H$	62
5.4	isomorphisme entre $(HDR _{D^*}, \tilde{\nabla})$ et le faisceau des sections holomorphes de GM muni de la connexion ∇	63
5.5	Les théorèmes de Phragmen-Lindelöf.	64
5.6	Régularité de la connexion de Gauss Manin.	67
6	Calcul d'une base du faisceau HDR et de la matrice de monodromie dans cette base.	73
6.1	L'application de monodromie	73
6.2	Construction d'une base du faisceau HDR dans le cas quasi-homogène.	75
6.3	Calcul d'une base du faisceau HDR dans le cas où $f = \sum_j z_j^{i_j}$	78
6.4	Calcul d'une base d'un faisceau HDR dans un cas non quasi-homogène.	80
A	Le théorème d'indice.	88

Introduction

Ce mémoire a pour but de définir la connexion de Gauss-Manin chez E. Brieskorn [1] et de donner la preuve de B. Malgrange de sa régularité [2]. Il s'appuie sur les notes d'un séminaire sur la connexion de Gauss-Manin pour une hypersurface à singularité isolée, rédigées par M. El Amrani [3]. On donnera une méthode de calcul pour la monodromie de Picard-Lefschetz complexe dans le cas d'une hypersurface à singularité isolée définie par un polynôme quasi-homogène. Dans la première partie, on considère $\bar{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, \underline{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de section holomorphe admettant une singularité isolée en 0. On définit alors un représentant de Milnor $f : X \rightarrow D$ associé à ce germe où D est un disque de \mathbb{C} et X est la trace de $f^{-1}(D)$ sur une boule de \mathbb{C}^{n+1} . Il doit être, en restriction à $X \setminus f^{-1}(0)$ une fibration lisse localement triviale. J. Milnor a démontré que le type d'homotopie des fibres est celui d'un bouquet de n -sphères [4]. On démontrera dans le chapitre 5 que le nombre de ces sphères est la dimension du quotient $\frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{J(f)}$ où $J(f)$ est l'idéal engendré par les dérivées partielles. On étudiera quelques propriétés du représentant de Milnor. Ce type de définitions permet de donner des propriétés topologiques des hypersurfaces. En effet, on voit que le groupe fondamental $\Pi_1(D \setminus \{0\}, s)$ opère sur la cohomologie singulière à coefficients entiers de la fibre $X(s)$, $H^n(X(s), \mathbb{Z})$. On définit alors la monodromie de Picard-Lefschetz local $h_{f,x}$ comme étant l'action d'un générateur de $\Pi_1(D \setminus \{0\}, s)$. La connaissance du polynôme caractéristique de cette monodromie donne la topologie de l'hypersurface dans le cas où la valeur en ± 1 du polynôme caractéristique est ± 1 (c.f.[4]).

Dans un deuxième temps, on définit un faisceau de Gauss-Manin:

$$GM = \bigcup_{s \in D^*} H^n(X(s), \mathbb{C})$$

GM est muni d'une structure de fibré vectoriel plat qui permet de définir une connexion appelée connexion transcendante locale (c.f. Brieskorn [1]) ou encore connexion de Gauss-Manin. Cette connexion est en rapport direct avec la monodromie complexe de Picard-Lefschetz, mais ne permet pas de la calculer.

C'est pourquoi on définit un autre fibré vectoriel holomorphe sur D muni d'une connexion méromorphe. Il s'agit d'un faisceau HDR , faisceau sur D , image directe par f du faisceau de cohomologie relative associé au complexe: $(\Omega_{X/D}^p =$

$$\frac{\Omega_X^p}{df \wedge \Omega_X^{p-1}}, d_{X/D}), \text{ i.e. } HDR = H^n(f_*(\Omega_{X/D}^p)).$$

On définira dans le quatrième chapitre un isomorphisme entre le faisceau des sections holomorphes de GM et la restriction du faisceau HDR à D^* . Pour sa démonstration, on utilisera trois théorèmes sur le faisceau HDR . Dans [1], Brieskorn démontre que ce faisceau est cohérent. Le deuxième est dû à E. Brieskorn

et à M. Sebastiani. E. Brieskorn a en effet démontré dans [1] que $\frac{HDR}{Torsion HDR}$ est un faisceau libre de rang μ . M. Sebastiani a prouvé une conjecture de E. Brieskorn selon laquelle $Torsion HDR = 0$ (c.f.[5]). On en conclut ainsi que le faisceau HDR est libre de rang μ . Le dernier théorème consiste à utiliser une n -forme holomorphe définie au voisinage de $\underline{0}$ au lieu d'une n -forme holomorphe définie au voisinage de la fibre $f^{-1}(0)$. En effet, on a le résultat dû à E. Brieskorn: $HDR_0 \cong H^n(\Omega_{X/D, \underline{0}})$. Ce dernier théorème sera utilisé à la fin de ce mémoire pour considérer le faisceau $H^n(\Omega_{X/D}^n)$ au lieu de HDR , plus facile à utiliser.

Enfin, on définira une connexion $\hat{\nabla}$ méromorphe sur HDR d'ordre au plus l où $f^l \in J(f)$. On démontrera qu'alors, l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de connexions. Le résultat important de ce mémoire est la régularité de la connexion de Gauss-Manin. Il sera démontré au chapitre 5. On a donné ici la démonstration due à B. Malgrange ([2]). Elle consiste à montrer que les solutions du système différentiel dual de celui défini par les sections horizontales de la connexion de Gauss-Manin sont à croissance modérée. On utilise ici les intégrales sur un domaine semi-analytique (c.f. Herrera [9]). On définira encore deux faisceaux $'H$ et $''H$ qui faciliteront les calculs.

Nous donnerons alors comme application le calcul d'une base de HDR dans le cas quasi-homogène ainsi que le calcul de la monodromie de Picard-Lefschetz complexe. Une première proposition permet de définir une n -forme holomorphe à partir d'un vecteur propre de la monodromie et inversement, à partir d'une n -forme holomorphe vérifiant une condition particulière, on définit un vecteur propre de la monodromie dont on peut calculer la valeur propre associée. Dans un deuxième temps, on construit une base uniforme de HDR qui permettra de donner une base de sections multiformes horizontales de $HDR|_D$, qui sont des vecteurs propres de la monodromie. La deuxième application est le calcul du résidu de la connexion de Gauss-Manin le long de l'hypersurface $\{0\} \subset D$ dans le cas où $f = x^6 + y^4 + x^2y^2$. Il s'agit d'un cas particulier de polynôme non-quasi-homogène qui vérifie $xf, yf, f^2 \in J(f)$. Ce calcul permet une fois de plus de calculer la matrice de monodromie de la connexion.

J'ai préparé ce mémoire à l'université d'Angers sous la direction de M. Granger. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet et de toute l'aide qu'il m'a apporté pendant ce travail.

Chapitre 1

Représentant de Milnor

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un germe de fonction holomorphe

$$\bar{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

et on suppose que 0 est un point singulier c'est à dire qu'il existe un représentant $f : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$ où U est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C}^{n+1} et V est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} tel que $d_0 f = 0$. On remarque que si un des représentants de f vérifie cette condition, alors il en est de même pour tous les autres représentants.

DEFINITION 1.1.1 *La singularité est dite isolée si il existe un représentant de $\bar{f}, f : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$ où U est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C}^{n+1} et V est un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} tel que $\{x \in U / d_x f = 0\} = \{0\}$ ou encore le système $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_0} = \dots = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_n} = 0$ définit 0.*

On suppose désormais que \bar{f} admet 0 pour point singulier isolé. On définit les ensembles suivants:
$$\begin{cases} X(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \|x\| < \varepsilon, |f(x)| < \eta\} \\ D(\eta) = \{s \in \mathbb{C} : |s| < \eta\} \end{cases}$$

On a alors la définition:

DEFINITION 1.1.2 *Soit $\bar{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe non nul. On appelle représentant de Milnor de \bar{f} , une fonction $f : X(\varepsilon, \eta) \rightarrow D(\eta)$ où ε assez petit et η assez petit devant ε pour que f induise une fibration lisse localement triviale de $X(\varepsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0)$ sur $D(\eta) \setminus \{0\}$.*

Pour démontrer l'existence d'un tel représentant, on utilise le résultat suivant:

THEOREME 1.1.3 (Théorème de Milnor) *Soit $f : (U, 0) \rightarrow (V, 0)$ une fonction holomorphe admettant 0 pour singularité isolée. Pour ε suffisamment petit et η suffisamment petit devant ε , $X(\varepsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D(\eta) \setminus \{0\}$ est une fibration lisse localement triviale dont la fibre a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères de dimension n avec $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\} / J(f)$ et $J(f)$ est l'idéal engendré par les dérivées partielles de f .*

Une démonstration de ce théorème est donné par J. Milnor dans [4]. On démontrera dans ce qui suit l'existence de la fibration lisse localement triviale. On constate que si l'on considère un représentant $f : U \rightarrow V$ de \overline{f} alors il existe ϵ et η suffisamment petits tel que f restreint à $X(\epsilon, \eta)$ soit un représentant de Milnor. On démontrera également que le représentant de Milnor ne dépend pas du représentant de \overline{f} choisi et que $X(\epsilon, \eta)$ est contractile. On admettra que $X(\epsilon, \eta)$ est de Stein. Enfin, dans le chapitre 5, on démontrera que

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(X(t), \mathbb{C}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n \\ \mu & \text{si } p = n \end{cases}$$

1.2 Submersions propres et fibrations lisses localement triviales.

On veut montrer qu'une submersion propre est une fibration lisse localement triviale.

THEOREME 1.2.1 *Soit X une variété réelle de dimension n et U un ouvert de \mathbb{R}^p tel que $0 \in U$. Soit $f : X \rightarrow U \subset \mathbb{R}^p$ une submersion propre. Alors il existe Δ un ouvert de U contenant 0 tel que*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{\cong} & \Delta \times f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

commute.

Démonstration

1. Construction locale d'un champ de vecteurs. Soit $x_0 \in X$. f est une submersion en x_0 donc il existe U_{x_0} et V_{x_0} voisinages de x_0 et $\Phi_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow V_{x_0}; (t_1, \dots, t_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ changement de coordonnées lisse tel que $f \circ \Phi_{x_0}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_p)$ (i.e. $f \circ \Phi_{x_0}$ est la projection des p premières coordonnées).

Soit $\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_p} \in \Theta(U_{x_0})$. Pour tout $j = 1, \dots, p$, on pose

$$\xi_j^{x_0} = T\Phi_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) \text{ avec } \xi_j^{x_0} \in \Theta(V_{x_0}).$$

2. Construction de p champs de vecteurs globaux: On considère une partition de l'unité $(\alpha_x)_{x \in X}$ associée au recouvrement $\{V_x\}_{x \in X}$ de X défini dans la première partie. On pose:

$$\xi_j = \sum_{x \in X} \alpha_x \xi_j^x$$

Ainsi les ξ_j sont définis globalement sur X . De plus, ils vérifient:

Pour tout $y \in X$,

$$\begin{aligned}
Tf(\xi_j)(y) &= Tf\left(\sum_{x \in X} \alpha_x T\Phi_x\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)\right)(y) \\
&= \sum_{x \in X} \alpha_x(y) Tf\left(T_y \Phi_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_y\right)\right) \\
&= \sum_{x \in X} \alpha_x(y) T_y(f \circ \Phi_x)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_y\right) \\
&= \sum_{x \in X} \alpha_x(y) Tpr\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_y \\
&= Tpr\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_y
\end{aligned}$$

D'où

$$Tf(\xi_j) = Tpr\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)$$

3. Soit maintenant $\epsilon > 0$ tel que $] - \epsilon, \epsilon[^p \subset U$. On se propose de construire un difféomorphisme $\Phi : f^{-1}(0) \times] - \epsilon, \epsilon[^p \rightarrow f^{-1}(] - \epsilon, \epsilon[^p)$. Pour cela, on va construire de proche en proche des difféomorphismes

$$\Phi_j : f^{-1}(0) \times] - \epsilon, \epsilon[^j \rightarrow f^{-1}(] - \epsilon, \epsilon[^j)$$

Cas $j = 1$: On considère le flot associé au champ de vecteurs ξ_1 , $\Phi_1 : V \rightarrow X$ avec $X \times \{0\} \subset V \subset X \times \mathbb{R}$ ouvert. À x fixé, on associe la courbe intégrale $\Phi_1(x, \cdot)$ définie sur un intervalle I_x de \mathbb{R} telle que pour tout $t_1 \in I_x$, $\Phi_1(x, t_1) \in f^{-1}(] - \epsilon, \epsilon[\times \{0\} \times \dots \times \{0\})$. Si $x \in f^{-1}(0)$, on a les résultats suivant:

- (a) $f \circ \Phi_1(x, t_1) = (t_1, 0, \dots, 0)$
- (b) $I_x =] - \epsilon, \epsilon[$

En effet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_1}(f \circ \Phi_1(x, t_1)) &= Tf\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(\Phi_1(x, t_1))\right) \\
&= Tf(\xi_1(\Phi_1(x, t_1))) \\
&= Tpr\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_{\Phi_1(x, t_1)} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_{pr(\Phi_1(x, t_1))}
\end{aligned}$$

D'où $f \circ \Phi_1(x, t_1) = (t_1 + cste, 0, \dots, 0) = (t_1, 0, \dots, 0)$ car $f \circ \Phi_1(x, 0) = f(x) = 0$.

Pour démontrer que $I_x =] - \epsilon, \epsilon[$, on raisonne par l'absurde. Posons $I_x =]\alpha, \beta[$ et supposons $\beta < \epsilon$. Si $t_1 \in [\beta - \eta, \beta[$, d'après ce qui précède on a:

$$\Phi_1(x, t_1) \in f^{-1}(t_1, 0, \dots, 0) \subset f^{-1}([\beta - \eta, \beta] \times \{0\} \times \dots \times \{0\}) \text{ compact car } f \text{ est propre.}$$

Alors il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\Phi_1(x, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet un point d'accumulation y . On considère alors $\Psi : U \times] - \eta, \eta[\rightarrow X$

le flot en y . $\Psi(y, t)$ est défini pour tout $t \in]-\eta, \eta[$. Par définition de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi(x, t_{n_0}) \in U$ et on peut supposer que $\beta - \eta < t_{n_0} < \beta$. On pose alors pour $t \in]-\eta, \eta[$:

$$\Psi(t) = \Phi(\Phi(x, t_{n_0}), t)$$

On sait par le théorème de Cauchy que $\Psi(t) = \Phi(x, t_{n_0} + t)$ pour tout $t_{n_0} + t < \beta$ ce qui permet de dire qu'il s'agit d'un prolongement de $\Phi(x, \cdot)$ au delà de β (car $\beta < t_{n_0} + \eta$). Contradiction. Donc $\beta = \epsilon$. On raisonne de la même façon pour montrer que $\alpha = -\epsilon$.

Cas j quelconque: On suppose construit

$$\Phi_{j-1} : f^{-1}(0) \times]-\epsilon, \epsilon[^{j-1} \rightarrow f^{-1}(0) \times]-\epsilon, \epsilon[^{j-1}$$

On veut construire Φ_j . On considère Ψ_j le flot associé à ξ_j , et on pose:

$$\Phi_j(x, t_1, \dots, t_j) = \Psi_j(\Phi_{j-1}(x, t_1, \dots, t_{j-1}), t_j)$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}(f \circ \Phi_j(x, t_1, \dots, t_j)) &= Tf\left(\frac{\partial}{\partial t_j}(\Psi_j(\Phi_{j-1}(x, t_1, \dots, t_{j-1}), t_j))\right) \\ &= Tf \circ \xi_j(\Psi_j(\Phi_{j-1}(x, t_1, \dots, t_{j-1}), t_j)) \\ &= Tpr\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_{(\Phi_j(x, t_1, \dots, t_j))} \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} f \circ \Phi_j(x, t_1, \dots, t_j) &= (0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0) + \text{cste}(t_1, \dots, t_{j-1}) \\ &= (t_1, \dots, t_j, 0, \dots, 0) \\ \text{car } f \circ \Phi_j(x, t_1, \dots, t_{j-1}, 0) &= (t_1, \dots, t_{j-1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

On montre comme dans le cas $j = 1$ que Φ_j est définie sur $f^{-1}(0) \times]-\epsilon, \epsilon[^j$ à valeur dans $f^{-1}(0) \times]-\epsilon, \epsilon[^j$. On pose alors $\Phi = \Phi_p$. Il s'agit bien d'un difféomorphisme d'inverse définie par: $\Phi^{-1}(x) = \Phi(x, -f(x))$. En effet, $\Phi(\Phi(x, t), -t) = x$. Dès lors, on a la trivialisaton:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow[\Phi^{-1}]{\cong} & \Delta \times f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

□

REMARQUE 1.2.2 Le résultat reste vrai si au lieu de considérer $0 \in U$, on prend $a \in U$. En effet, on pose $g(x) = f(x) - a$ qui reste une submersion propre et on applique le théorème à la fonction g . On a alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}(\Delta) & \xrightarrow[\cong]{} & \Delta \times g^{-1}(0) \\ & \searrow g & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

Or $g^{-1}(0) = f^{-1}(a)$ et si on pose $\Delta_a = a + \Delta$ on a $g^{-1}(\Delta) = f^{-1}(\Delta_a)$. On obtient alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta_a) & \xrightarrow{\cong} & \Delta_a \times f^{-1}(a) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta_a & \end{array}$$

Ainsi f est une fibration lisse localement triviale.

On peut également démontrer le même résultat si X est une variété à bord. En effet :

THEOREME 1.2.3 Soit X une variété à bord réelle de dimension n et U un ouvert de \mathbb{R}^p contenant 0 . Soit $f : X \rightarrow U \subset \mathbb{R}^p$ une submersion propre sur X et sur ∂X . Alors il existe Δ un ouvert de U contenant 0 tel que :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{\cong} & \Delta \times f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

De plus, ce diagramme respecte le bord et l'intérieur de X .

Démonstration

Les parties 2 et 3 de la démonstration sont similaires aux précédentes. Mais la construction locale des champs de vecteurs n'est plus valable. Il faut regarder ce qui se passe sur le bord de la variété X . On considère $x_0 \in X$.

1. Si x_0 est à l'intérieur de X , il existe U_{x_0} et V_{x_0} voisinages de x_0 dans l'intérieur de X et $\Phi_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow V_{x_0}$ changement de coordonnées lisse tel que

$$f \circ \Phi_{x_0}(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_p)$$

On choisit alors, pour tout $j = 1, \dots, p$ les champs de vecteurs:

$$\xi_j^{x_0} = T\Phi_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} \right) \in \Theta(V_{x_0})$$

2. Si x_0 est sur le bord de X . On considère une carte (U, ϕ) de X telle que $x_0 \in U$ et $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$. On a ainsi un système de coordonnées tel que les points de $U \cap \partial X$ s'écrivent $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Or f est une submersion sur ∂X donc il existe un voisinage de x_0 noté W_{x_0} dans ∂X que l'on peut supposer dans $U \cap \partial X$, W'_{x_0} un autre voisinage de x_0 dans ∂X et un changement de coordonnées lisse $\Phi_{x_0} : W_{x_0} \rightarrow W'_{x_0}$ tel que $f(\Phi_{x_0}(x_1, \dots, x_{n-1}), 0) = (x_1, \dots, x_p)$. On pose alors $\Psi_{x_0} : W_{x_0} \times [0, \epsilon[\rightarrow W'_{x_0} \times [0, \epsilon[$ tel que

$$\Psi_{x_0}(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_{x_0}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

On va alors montrer que $(f \circ \psi_{x_0}, x_{p+1}, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme qui respecte le bord. En effet, on peut montrer que la matrice Jacobienne

de cette application est inversible.

En effet, on sait que $f_i \circ \Psi_{x_0}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = x_i$. Ainsi, on obtient la matrice Jacobienne:

$$J(f \circ \Psi_{x_0}, x_{p+1}, \dots, x_n)(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial(f_1 \circ \Psi_{x_0})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial(f_p \circ \Psi_{x_0})}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc bien d'un difféomorphisme au voisinage de x_0 . De plus, par construction, il respecte le bord. Dès lors, f est la projection des p premières coordonnées au voisinage de chaque point x_0 dans un système de coordonnées convenable. On finit le raisonnement comme précédemment. La construction du premier paragraphe permet d'avoir le respect du diagramme sur l'intérieur de X et la construction du deuxième paragraphe celui sur le bord de X .

□

1.3 Transversalité.

Dans ce paragraphe, on considèrera des points singuliers non nécessairement isolés. Il a pour but de donner une structure de variété aux ensembles suivants: $f^{-1}(\eta) \cap S_\epsilon$, $f^{-1}(D_\eta) \cap S_\epsilon$, $\overline{X}(\epsilon, \eta) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \|z\| \leq \epsilon, f(z) < \eta\}$ avec η et ϵ choisis convenablement. On rappelle tout d'abord:

DEFINITION 1.3.1 Soit V et W deux sous variétés lisses de \mathbb{R}^n . On dit que V est transverse à W en x_0 si et seulement si $T_{x_0}V + T_{x_0}W = \mathbb{R}^n$.

La transversalité est une des conditions pour qu'une intersection de deux variétés reste une variété. En effet, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 1.3.2 Soit $g = (g_1, \dots, g_q)$ une submersion. Alors $W = \{g = 0\}$ est de codimension q . Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une variété lisse. Si V est transverse à W en x_0 alors $(V \cap W, x_0)$ est un germe de sous variété de \mathbb{R}^n .

Démonstration

Comme $W = \{g = 0\}$, on a $V \cap W = \{g|_V = 0\}$. Pour montrer que $(V \cap W, x_0)$ est un germe de sous variété de \mathbb{R}^n , on va montrer que $g|_V$ est une submersion en x_0 . On sait:

1. $T_{x_0}W = \{d_{x_0}g = 0\} = \ker d_{x_0}g$
2. $\mathbb{R}^n = T_{x_0}V + T_{x_0}W$ par hypothèse.
3. On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}V & \xrightarrow{d_{x_0}g|_V} & \mathbb{R}^q \\ & \searrow i & \nearrow d_{x_0}g \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Soit $y \in \mathbb{R}^q$. g est une submersion donc $d_{x_0}g$ est surjective. Dès lors, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $d_{x_0}g(x) = y$. Or par transversalité, $\mathbb{R}^n = T_{x_0}V + \ker d_{x_0}g$. Donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in T_{x_0}V$ et $x_2 \in \ker d_{x_0}g$. Alors,

$$d_{x_0}g|_V(x_1) = d_{x_0}g(x) = y$$

et donc $d_{x_0}g|_V$ est surjective. □

On considère maintenant $\bar{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe tel que 0 est un point singulier. On va montrer deux lemmes de transversalité. On introduit tout d'abord un lemme indispensable à leurs démonstrations:

LEMME 1.3.3 (Lemme des petits chemins.) *Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble analytique et $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert défini par $U = \{x \in \mathbb{R}^m / g_1(x) > 0, \dots, g_q(x) > 0\}$ avec g_1, \dots, g_q holomorphes. Si $U \cap V$ contient un point arbitrairement proche de l'origine, alors il existe un chemin différentiable $p : [0, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $p(0) = 0$ et $p(t) \in U \cap V$, pour tout $t > 0$.*

Pour le cas algébrique, une démonstration est donnée dans [4].

1.3.1 cas d'une singularité isolée:

On considère $f : U \rightarrow V$ un représentant du germe de fonction holomorphe \bar{f} .

LEMME 1.3.4 1. *Il existe ϵ_0 tel que pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et pour tout $x_0 \in f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$, on ait $f^{-1}(0)$ est transverse à S_ϵ en x_0 .*

$$i.e. T_{x_0}(f^{-1}(0)) + T_{x_0}S_\epsilon = \mathbb{C}^{n+1}$$

2. *Pour $\epsilon_0 > \epsilon_1$, ϵ_0 vérifiant 1, on a: Pour tout $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_0]$ et tout η , $|\eta| < \eta_1$, S_ϵ est transverse à $f^{-1}(\eta)$.*

$$i.e. T_{x_0}(f^{-1}(\eta)) + T_{x_0}S_\epsilon = \mathbb{C}^{n+1}$$

Rappel sur les gradients: On considère sur \mathbb{C}^{n+1} le produit hermitien standard \langle, \rangle . On définit alors:

$$grad f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right)$$

$$\text{et on a: } \frac{d(f(p(t)))}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt}, \overline{grad(f)} \right\rangle$$

Démonstration

1. Démontrons le premier point:

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_\epsilon \in S_\epsilon \cap f^{-1}(0)$ tel que $T_{x_\epsilon}(f^{-1}(0)) \subset T_{x_\epsilon}S_\epsilon$.

Remarque : $f^{-1}(0)$ est une variété lisse réelle de dimension $2n$ et S_ϵ est une variété lisse réelle de dimension $2n + 1$. Ainsi, au voisinage de $x_0 \in S_\epsilon$ (régulier pour ϵ suffisamment petit non nul car le point singulier est isolé), on a :

$$T_{x_0}(f^{-1}(0)) + T_{x_0}S_\epsilon = \mathbb{C}^{n+1} \iff T_{x_0}(f^{-1}(0)) \not\subset T_{x_0}S_\epsilon$$

On pose $w = \overline{\text{grad } f(x_0)}$ pour $x_0 \in f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$. Pour $x_0 \neq 0$, on a $w \neq 0$ car 0 est la seule singularité de f .

Soit $v \in T_{x_0}(f^{-1}(0))$. Alors $\langle v, w \rangle = 0$ (On a $v = \frac{dp}{dt}$ avec p chemin tracé sur $f^{-1}(0)$ et d'après le rappel sur les gradients, $\langle v, w \rangle = \frac{d}{dt}(f(p(t))) = 0$). D'où $\text{Re } \langle v, w \rangle = \text{Im } \langle v, w \rangle = 0$. Et ainsi $\text{Re } \langle v, w \rangle = \text{Re } \langle v, iw \rangle = 0$. Dès lors $w, iw \in (T_{x_0}f^{-1}(0))^\perp$ (orthogonal pour le produit euclidien qui n'est autre que $\text{Re } \langle \cdot, \cdot \rangle$). Comme $T_{x_0}(f^{-1}(0))$ est de dimension $2n$ sur \mathbb{R} , on a w et iw base réelle de $(T_{x_0}f^{-1}(0))^\perp$.

De plus, on sait par hypothèse que $T_{x_0}S_\epsilon \supset T_{x_0}(f^{-1}(0))$ donc $(T_{x_0}S_\epsilon)^\perp \subset (T_{x_0}(f^{-1}(0)))^\perp$

Or $(T_{x_0}S_\epsilon)^\perp = \mathbb{R}.x_0$. Dès lors $x_0 \in \overline{\mathbb{C}. \text{grad } f(x_0)}$

On va maintenant utiliser le lemme des petits chemins(1.3.3). On pose :

- (a) $V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \text{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\text{grad } f(z)}, z) = 1, f(z) = 0\}$ ensemble analytique.
- (b) $U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \|z\| > 0\}$ ouvert de $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$
- (c) On a supposé que pour tout $\epsilon > 0$, il existait un $x_0 \in S_\epsilon \cap V$. On peut alors construire une suite d'éléments de $S_\epsilon \cap V$ convergeant vers 0. Ainsi, $0 \in \overline{U \cap V}$.

Alors il existe $p : [0, \epsilon[\rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ lisse tel que $p(0) = 0$ et pour tout $t > 0, p(t) \in U \cap V$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ p(t)) &= \langle p'(t), \overline{\text{grad } f(p(t))} \rangle \\ &= \langle p'(t), \lambda(t)p(t) \rangle \\ &= \overline{\lambda(t)} \langle p'(t), p(t) \rangle \\ &= \frac{\overline{\lambda(t)}}{2} \frac{d}{dt} \|p(t)\|_{\mathbb{R}}^2 \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que $\lambda(t) \neq 0$ pour $t > 0$ car sinon, on aurait $\text{grad}(f(p(t))) = 0$ et donc $p(t) = 0$. On a $p(t) \in U \cap V$ donc $f(p(t)) = 0$ pour tout $t > 0$. D'où $\frac{d}{dt} \|p(t)\|_{\mathbb{R}}^2 = 0$. Par suite, on a $\|p(t)\|_{\mathbb{R}} = cste = p(0) = 0$. Contradiction car $p(t) \in U \cap V$ implique que $\|p(t)\|_{\mathbb{R}} > 0$.

2. Pour démontrer le deuxième point, on pose

$$Z = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \epsilon_1 \leq \|z\| \leq \epsilon_0, \text{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\text{grad } f(z)}, z) = 2\}$$

Comme ϵ_0 vérifie le premier point, on a $f^{-1}(0) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}} \subset Z$. On veut alors montrer qu'il existe un η_1 tel que $f^{-1}(D_{\eta_1}) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}} \subset Z$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in f^{-1}(D_{\frac{1}{n}}) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}}$

tel que $rg_{\mathbb{C}}(\overline{\text{grad } f(x_n)}, x_n) \leq 1$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dans le compact $\overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}}$. Elle admet donc un point d'accumulation a et on a :

- $rg_{\mathbb{C}}(\text{grad } f(a), a) \leq 1$
- $a \in f^{-1}(0) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}}$

Contradiction car $f^{-1}(0) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}} \subset \overline{Z}$.

□

REMARQUE 1.3.5 1. D'après le lemme 1.3.4 1, pour ϵ suffisamment petit, $f^{-1}(0)$ est transverse à S_{ϵ} en x_0 . Alors d'après la proposition 1.3.2, $f^{-1}(0) \cap S_{\epsilon}$ est une sous variété lisse de \mathbb{C}^{n+1} .

2. D'après le lemme 1.3.4 2, pour tout $x_0 \in S_{\epsilon} \cap f^{-1}(c)$, $f^{-1}(c)$ est transverse à S_{ϵ} en x_0 et la proposition 1.3.2 implique alors que $(f^{-1}(c) \cap S_{\epsilon}, x_0)$ est un germe de sous variété $(f^{-1}(c) = \{f(x) - c = 0\})$ et $f - c$ est une submersion pour tout $x \in S_{\epsilon} \cap f^{-1}(c)$. Dès lors, $K_c = f^{-1}(c) \cap S_{\epsilon}$ est une sous variété.

3. Par le lemme 1.3.4 2, on montre que $f^{-1}(D_{\eta}) \cap C_{\epsilon_1 \epsilon_0}$ est une variété lisse ainsi que $X(\epsilon, \eta) \setminus \{0\}$, $X(\epsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(D_{\eta}) \cap S_{\epsilon}$. On a également $f^{-1}(D_{\eta}) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}}$ variété lisse à bord.

1.3.2 Cas d'une singularité non isolée.

LEMME 1.3.6 (Lemme de Sard) Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $z \in B(0, \epsilon)$ et $f(z) \neq 0$, on a $\text{grad } f(z) \neq 0$.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $z \in B(0, \epsilon)$ tel que $f(z) \neq 0$ et $\text{grad}(f(z)) = 0$. On pose :

- $V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \text{grad } f(z) = 0\}$ espace analytique.
- $U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |f(z)|^2 > 0\}$ ouvert de \mathbb{C}^{n+1} .
- $0 \in \overline{U \cap V}$ par hypothèse.

Par le lemme des petits chemins, il existe un chemin lisse $p : [0, \epsilon'] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $p(0) = 0$ et $p(t) \in U \cap V$ pour tout $t > 0$. Or :

$$\frac{d}{dt}(f \circ p(t)) = \langle p'(t), \overline{\text{grad } f(p(t))} \rangle = 0$$

d'où $f \circ p(t) = cste = 0$ car $f \circ p(0) = 0$. Contradiction car $p(t) \in U$.

□

LEMME 1.3.7 Pour ϵ fixé vérifiant le lemme de Sard, il existe η_0 tel que pour tout $0 < |\eta| < \eta_0$ et pour tout $x_0 \in S_{\epsilon} \cap f^{-1}(\eta)$, on ait $f^{-1}(\eta)$ est transverse à S_{ϵ} en x_0 .

$$i.e. T_{x_0}(f^{-1}(\eta)) + T_{x_0}S_{\epsilon} = \mathbb{C}^{n+1}$$

Démonstration

On fixe ϵ vérifiant le lemme de Sard. On va raisonner par l'absurde. Supposons que pour tout $\eta > 0$, il existe $z \in f^{-1}(\eta) \cap S_\epsilon$ tel que $T_z(f^{-1}(\eta)) \subset T_z S_\epsilon$. D'après le raisonnement précédent, $z \in Z \cap f^{-1}(\eta)$ avec

$$Z = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\operatorname{grad} f(z)}, z) = 1, |f(z)|^2 > 0, \|z\| = \epsilon\}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in Z \cap f^{-1}(\frac{1}{n})$. De plus $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans S_ϵ compact. Elle admet donc un point d'accumulation a . D'où $a \in \overline{Z}$. On utilise le lemme des petits chemins.

- $V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \|z\| = \epsilon, \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\operatorname{grad} f(z)}, z) = 1\}$ espace algébrique.
- $U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |f(z)|^2 > 0\}$ ouvert de \mathbb{C}^{n+1} .
- $a \in \overline{U \cap V} = \overline{Z}$.

Donc il existe $p : [0, \epsilon'[\rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ telle que $p(0) = a$ et $p(t) \in U \cap V$, pour tout $t > 0$. Or:

$$\frac{d}{dt} f \circ p(t) = \frac{1}{2} \lambda(t) \frac{d}{dt} \|p(t)\|_{\mathbb{R}}^2 = 0 \text{ car } \|p(t)\|_{\mathbb{R}} = \epsilon_0$$

Donc $f \circ p(t) = cste = f \circ p(0) = f(a) = 0$. Contradiction car $p(t) \in Z$ pour tout $t > 0$ donne $f \circ p(t) \neq 0$.

□

REMARQUE 1.3.8 On voit alors que si ϵ est suffisamment petit et η suffisamment petit devant ϵ , $f^{-1}(\eta) \cap S_\epsilon$ est une sous variété lisse de \mathbb{C}^{n+1} .

1.4 Exemples de fibrations lisses localement triviales.

Dans ce paragraphe, nous donnerons trois fibrations lisses localement triviales dans le cas d'une singularité isolée.

THEOREME 1.4.1 $f : f^{-1}(D_\eta) \cap S_\epsilon \rightarrow D_\eta$ est une fibration lisse localement triviale pour ϵ et η suffisamment petit.

Démonstration

- D'après le lemme 1.3.4 2, pour ϵ suffisamment petit et η suffisamment petit devant ϵ , $f^{-1}(D_\eta) \cap S_\epsilon$ est une variété lisse.
- D_η ouvert de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
- f est une submersion (car les points sont réguliers) et est propre (car l'ensemble de définition est intersecté par S_ϵ compact).

Donc d'après le théorème 1.2.1, f est une fibration lisse localement triviale.

□

THEOREME 1.4.2 $\phi : f^{-1}(D_{\eta_0}) \cap \overline{C_{\epsilon'_1 \epsilon'_0}} \rightarrow D_{\eta_0} \times [\epsilon'_1, \epsilon'_0]$; $\phi(x) = (f(x), \|x\|)$
est une fibration lisse localement triviale pour ϵ'_1, ϵ'_0 et η_0 suffisamment petit.

Démonstration

1. On va tout d'abord montrer que $\tilde{\phi} : f^{-1}(D_{\eta_0}) \cap C_{\epsilon_1 \epsilon_0} \rightarrow D_{\eta_0} \times]\epsilon_1, \epsilon_0[$ est une fibration lisse localement triviale pour ϵ_1 et ϵ_0 suffisamment petits. Dans un premier temps, on va démontrer que $\tilde{\phi}$ est une submersion. $\tilde{\phi}$ est une submersion sur le premier facteur, i.e. $T_{x_0} D_{\eta_0} \times \{0\} \subset \text{im } d\tilde{\phi}$ car $p_1 \circ \tilde{\phi} = f$ submersion. De plus, on a $\ker(df) = T_{x_0} f^{-1}(\eta)$, pour η valeur régulière. Or d'après la proposition 1.3.6, pour $\epsilon_1 < \epsilon_0$ avec ϵ_0 vérifiant le lemme 1.3.4 1, il existe un η_0 tel que pour tout $\eta, |\eta| \leq \eta_0, T_{x_0} f^{-1}(\eta) \not\subset T_{x_0} S_\epsilon$ (transversalité). Donc il existe $\xi \in \ker(df) \setminus T_{x_0} S_\epsilon$. Ainsi, $df(\xi) = 0$ et $\xi \notin T_{x_0} S_\epsilon$ donne $d(\|\cdot\|)(\xi) \neq 0$. D'où $\{0\} \times T_{x_0}]\epsilon_1, \epsilon_0[\subset \text{im } d\tilde{\phi}$. On a ainsi:

$$T_{x_0} D_{\eta_0} \times T_{x_0}]\epsilon_1, \epsilon_0[= \text{im } d\tilde{\phi}$$

i.e. $\tilde{\phi}$ est une submersion.

2. $\tilde{\phi}$ est propre. En effet, soit $K \subset D_{\eta_0} \times]\epsilon_1, \epsilon_0[$ un compact. Il existe alors $\eta_1, \epsilon, \epsilon'$ tels que $K \subset \overline{D_{\eta_1}} \times [\epsilon, \epsilon']$. $\tilde{\phi}$ est continue donc $\tilde{\phi}^{-1}(K)$ est fermé. De plus, $\tilde{\phi}^{-1}(K) \subset f^{-1}(D_{\eta_1}) \times \overline{C_{\epsilon \epsilon'}}$ compact. D'où $\tilde{\phi}^{-1}(K)$ est compact et $\tilde{\phi}$ est propre.
3. $f^{-1}(D_{\eta_0}) \cap C_{\epsilon_1 \epsilon_0}$ est une variété lisse car ouvert de \mathbb{C}^{n+1} .
4. $D_{\eta_0} \times]\epsilon_1, \epsilon_0[$ est un ouvert de \mathbb{R}^3 .

D'où, d'après le théorème 1.2.1, $\tilde{\phi}$ est une fibration lisse localement triviale. On choisit alors ϵ'_1 et ϵ'_0 tels que $\epsilon_1 < \epsilon'_1 < \epsilon'_0 < \epsilon_0$ et d'après ce qui précède, on a $\phi : f^{-1}(D_{\eta_0}) \cap \overline{C_{\epsilon_1 \epsilon_0}} \rightarrow D_{\eta_0} \times [\epsilon_1, \epsilon_0]$ est une fibration lisse localement triviale.

□

THEOREME 1.4.3 (Théorème de Milnor) Dans le cas d'une singularité isolée, $f : X(\epsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_\eta^*$ est une fibration lisse localement triviale.

Démonstration

On pose $\phi : \overline{X}(\epsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_\eta$ avec $\overline{X}(\epsilon, \eta) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \|z\| \leq \epsilon, |f(z)| < \eta\}$.

- ϕ est une submersion propre.
- $\overline{X}(\epsilon, \eta) \setminus f^{-1}(0)$ est une variété à bord pour ϵ suffisamment petit et η suffisamment petit devant ϵ , d'après la remarque 1.3.5.
- D_η^* ouvert de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Donc d'après le théorème 1.2.3, ϕ est une fibration lisse localement triviale et elle conserve l'intérieur. Ainsi, f est une fibration lisse localement triviale.

□

1.5 Remarques sur le théorème de Milnor.

1.5.1 La fibration ne dépend pas de ϵ et de η .

Démonstration

On considère $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ et $0 < \eta_2 < \eta_1$ tel que:

$$\begin{aligned}\phi_1 &: X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_{\eta_1}^* \\ \phi_2 &: X(\epsilon_2, \eta_2) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_{\eta_2}^*\end{aligned}$$

soient deux fibrations lisses localement triviales. On va démontrer que ces deux fibrations sont équivalentes. En fait, on va montrer un peu plus. On va trouver un difféomorphisme entre $X(\epsilon_1, \eta_1)$ et $X(\epsilon_2, \eta_2)$ tel que sa restriction à $X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus f^{-1}(0)$ donne l'équivalence des deux fibrations. Pour cela, on va décomposer la démonstration en deux :

- $X(\epsilon_1, \eta_1)$ est difféomorphe à $X(\epsilon_1, \eta_2)$ et la fibration ne dépend pas de η .
- $X(\epsilon_1, \eta_2)$ est difféomorphe à $X(\epsilon_2, \eta_2)$ et la fibration ne dépend pas de ϵ .

1. Démontrons que $X(\epsilon_1, \eta_1)$ est difféomorphe à $X(\epsilon_1, \eta_2)$ et que la fibration est indépendante de η . Il faut trouver un relèvement du difféomorphisme:

$$\begin{aligned}\phi &: D_{\eta_1} \rightarrow D_{\eta_2} \\ s &\mapsto \frac{\eta_2}{\eta_1}s = \lambda s\end{aligned}$$

Pour cela, on considère le champs de vecteurs $-t \frac{\partial}{\partial t}$ sur D_{η_1} . Il s'agit en fait du champ de vecteurs $-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ via l'isomorphisme entre $T\mathbb{R}^2$ et $T\mathbb{C}$ qui à $\frac{\partial}{\partial x}$ associe $\frac{\partial}{\partial t}$ et à $\frac{\partial}{\partial y}$ associe $i \frac{\partial}{\partial t}$. On le relève comme dans la démonstration du théorème 1.2.1, en un champs de vecteur ξ sur $X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus \{0\}$ ($Tf(\xi) = -t \frac{d}{dt}$). On considère alors $\phi(x, t)$ le flot associé à ξ . Pour tout $x \in X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus \{0\}$, $f \circ \phi(x, t)$ vérifie $\frac{d}{dt}(f \circ \phi(x, t)) = -f \circ \phi(x, t)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \phi(x, t)) &= Tf\left(\frac{d}{dt}(\phi(x, t))\right) \\ &= Tf(\xi(\phi(x, t))) \\ &= \left(-t \frac{d}{dt}\right)_{f \circ \phi(x, t)}\end{aligned}$$

Dès lors, $f \circ \phi(x, t) = Ce^{-t}$ et comme $f \circ \phi(x, 0) = f(x)$, on a

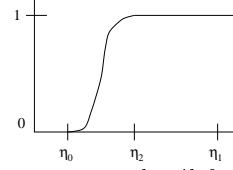
$$f \circ \phi(x, t) = f(x)e^{-t}$$

Or $0 < \lambda < 1$ donc il existe un $t_0 > 0$ tel que $\lambda = e^{-t_0}$. De plus, on peut montrer comme dans la démonstration du théorème 1.2.1 que le domaine de définition de $\phi(x, \cdot)$ contient $[0, \infty[$ ce qui permet de dire que $\phi(x, t_0)$ est bien défini pour tout $x \in X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus \{0\}$.

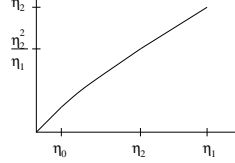
Soit alors η_0 tel que $\eta_0 < \eta_2 < \eta_1$. On considère la fonction lisse:

$g : D_\eta \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq \eta_0 \\ 1 & \text{si } |x| \geq \eta_2 \\ \in [0, 1] & \text{si } \eta_0 < |x| < \eta_2 \end{cases}$$



telle que la fonctions $\alpha(u) = ue^{-t_0g(u)}$ soit croissante. Pour cela, il faut prendre un η_0 suffisamment petit de sorte que $\alpha(u) = u$ pour tout $|u| \leq \eta_0$, $\alpha(u) = ue^{-t_0}$ pour tout $|u| \geq \eta_2$ et $\alpha'(u) \leq 1$.



En effet, si α est de pente plus petite que 1, on aura $\frac{\alpha(u)}{u}$ décroissante et quitte à choisit un $\eta_0 < \frac{\eta_2^2}{\eta_1}$, on peut trouver un tel α et par suite un g convenable. On pose alors $\psi(x, t) = \phi(x, g(x)t)$. On peut la prolonger en \underline{Q} en posant $\psi(\underline{Q}, t) = 0$. On voit alors que si $x \in X(\epsilon_1, \eta_1)$ alors $\psi(x, t_0) \in X(\epsilon_1, \eta_2)$. En effet,

- si $x \in X(\epsilon_1, \eta_0)$ alors $\psi(x, t_0) = \phi(x, 0) = x \in X(\epsilon_1, \eta_2)$.
- si $x \in X(\epsilon_1, \eta_2) \setminus X(\epsilon_1, \eta_0)$, $f \circ \psi(x, t_0) = f \circ \phi(x, g(x)t_0) = f(x)e^{-g(x)t_0} \leq f(x)e^{-t_0} = f \circ \phi(x, t_0) \in X(\epsilon_1, \eta_2)$.
- si $x \in X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus X(\epsilon_1, \eta_2)$, $\psi(x, t_0) = \phi(x, t_0) \in X(\epsilon_1, \eta_2)$.

Dès lors, l'application $\psi(\cdot, t_0) : X(\epsilon_1, \eta_1) \rightarrow X(\epsilon_1, \eta_2)$ est une application lisse et on peut construire de la même façon l'application lisse inverse. Ainsi ψ est un difféomorphisme. De plus, on voit que si $x \in f^{-1}(0)$ alors $f \circ \psi(x, t_0) = 0$ et inversement. Dès lors, le difféomorphisme conserve $f^{-1}(0)$ et ainsi, $X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus f^{-1}(0)$ est difféomorphe à $X(\epsilon_1, \eta_2) \setminus f^{-1}(0)$ via l'application $\phi(\cdot, t_0)$ et le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} X(\epsilon_1, \eta_1) \setminus f^{-1}(0) & \xrightarrow{\phi(\cdot, t_0)} & X(\epsilon_1, \eta_2) \setminus f^{-1}(0) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ D_{\eta_1}^* & \xrightarrow{\phi} & D_{\eta_2}^* \end{array}$$

Dès lors, la fibration ne dépend pas de η .

2. Démontrons que $X(\epsilon_1, \eta_2)$ est difféomorphe à $X(\epsilon_2, \eta_2)$ et que la fibration ne dépend pas de ϵ . On va utiliser le résultat suivant:

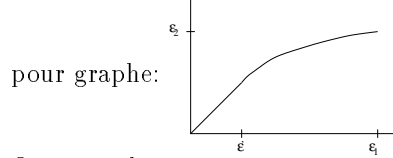
THEOREME 1.5.1 *Si $f : X \rightarrow Y$ est une fibration lisse localement triviale et Y est contractile, alors la fibration est triviale.*

Quitte à prendre un η_2 plus petit et à utiliser le point précédent, on peut supposer qu'il existe un ϵ' tel que $\epsilon' < \epsilon_2 < \epsilon_1$ et $X(\epsilon', \eta_2) \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_{\eta_2}^*$

est une fibration lisse localement triviale. On a vu dans la démonstration de 1.4.2 que

$$\Psi = (f, \|\cdot\|) : X(\epsilon_1, \eta_2) \setminus \overline{X(\epsilon', \eta_2)} \rightarrow D_{\eta_2} \times]\epsilon', \epsilon_1[$$

était une fibration lisse localement triviale. Alors, d'après le théorème précédent, il s'agit en fait d'une fibration lisse triviale. On note Φ cette trivialisatoin. On considère de plus une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse ayant



On pose alors:

$$\tau(x) = \phi^{-1}(f(x), g(\|x\|), p_3 \circ \phi(x))$$

Il reste à voir qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme. On voit immédiatement que τ est lisse. De plus, on peut construire de la même façon l'application inverse de τ en utilisant g^{-1} et montrer qu'il s'agit encore d'une fonction lisse. On a ainsi notre difféomorphisme entre $X(\epsilon_1, \eta_2)$ et $X(\epsilon_2, \eta_2)$. Enfin, ce difféomorphisme conserve les fibres car $f \circ \Psi^{-1}(f(x), g(\|x\|), p_3 \circ \Psi(x)) = f(x)$. Ainsi, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X(\epsilon_1, \eta_2) \setminus f^{-1}(0) & \xrightarrow{\tau} & X(\epsilon_2, \eta_2) \setminus f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & & D_{\eta_2}^* \end{array}$$

qui donne l'indépendance de la fibration par rapport à ϵ .

□

COROLLAIRE 1.5.2 *Le représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe ne dépend pas du choix du représentant.*

Démonstration

Soit $f_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ deux représentants de \bar{f} germe de fonction holomorphe. D'après le théorème de Milnor appliqué à f_1 et f_2 , il existe ϵ_i et η_i suffisamment petits tel que $f_i|_{X(\epsilon_i, \eta_i)}$ est un représentant de Milnor de \bar{f} . Or f_1 et f_2 sont des représentants d'un même germe donc on peut trouver ϵ et η tel que f_1 et f_2 coïncident sur $X(\epsilon, \eta)$ (en reappliquant le théorème de Milnor). Comme la fibration ne dépend pas de ϵ et η , on a le résultat.

□

1.5.2 $X(\epsilon, \eta)$ est contractile.

Démonstration

1. $0 \in X(\epsilon, \eta)$ ouvert de \mathbb{C}^{n+1} donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(0, \rho) \subset X(\epsilon, \eta)$. Pour un tel ρ , il existe un η' tel que $X(\rho, \eta') \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D_{\eta'}^*$ est une fibration lisse localement triviale et $X(\rho, \eta') \subset B(0, \rho)$.

2. On va montrer que $X(\rho, \eta')$ se rétracte sur $\{0\}$ dans $X(\epsilon, \eta)$. On considère tout d'abord h le difféomorphisme du paragraphe 1.5.1 entre $X(\epsilon, \eta)$ et $X(\rho, \eta')$. On pose alors:

$$\begin{aligned} \tilde{h} : X(\epsilon, \eta) \times [0, 1] &\rightarrow X(\epsilon, \eta) \\ (x, t) &\mapsto (1-t)h(x) \end{aligned}$$

- $h(x) \in X(\rho, \eta') \subset B(0, \rho)$ et ainsi, $(1-t)h(x) \in B(0, \rho) \subset X(\epsilon, \eta)$. Dès lors, \tilde{h} est bien définie.
- Cette application est continue comme composée d'applications continues.
- $\tilde{h}(X(\epsilon, \eta), 0) = h(X(\epsilon, \eta)) = X(\rho, \eta')$.
- $\tilde{h}(x, 1) = 0$ pour tout $x \in X(\epsilon, \eta)$.

Dès lors, $X(\rho, \eta')$ se rétracte sur $\{0\}$ dans $X(\epsilon, \eta)$. Par sa construction même, le difféomorphisme entre $X(\epsilon, \eta)$ et $X(\rho, \eta')$ est homotope à l'identité. Ainsi, $X(\epsilon, \eta)$ se rétracte sur $X(\rho, \eta')$. Dès lors, on a $X(\epsilon, \eta)$ contractile.

□

1.5.3 $f^{-1}([0, t]) \cap B_\epsilon$ est contractile avec $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit.

On se place dans une situation de Milnor pour ϵ et η suffisamment petit. On considère alors $t \in D_\eta$, $t > 0$. On note $Y_{t, \epsilon} = f^{-1}([0, t]) \cap B_\epsilon$. On veut montrer que $Y_{t, \epsilon}$ est contractile. Comme précédemment, on peut montrer que pour tout $t' < t$, et pour tout $\epsilon' < \epsilon$, $Y_{t', \epsilon'}$ est un rétracte par déformation de $Y_{t, \epsilon}$. En effet, si h est le difféomorphisme entre $X(\epsilon, t)$ et $X(\epsilon', t')$, on pose

$$\begin{aligned} \phi_{t, t'} : Y_{t, \epsilon} \times [0, 1] &\rightarrow Y_{t, \epsilon} \\ (x, t) &\mapsto (1-t)h(x) \end{aligned}$$

Cette application est bien définie car le difféomorphisme qui permet de passer de ϵ à ϵ' laisse invariant les fibres et celui permettant de passer de t à t' est défini à partir d'un champ de vecteurs radial. On construit alors une suite décroissante d'ensembles Y_{t_n, ϵ_n} tels que $t_n \rightarrow 0$ et $\epsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et $Y_{t_{n+1}, \epsilon_{n+1}}$ est un rétracte par déformation de Y_{t_n, ϵ_n} . L'homotopie ϕ entre $Y_{t, \epsilon}$ et $\{0\}$ consiste à découper l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles $[\sum_{k=1}^i (\frac{1}{2})^k, \sum_{k=1}^{i+1} (\frac{1}{2})^k]$. On pose alors:

- Si $s \in [0, \frac{1}{2}]$, $\phi(x, s) = \phi_{01}(x, 2s)$.
- Si $s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $\phi(x, s) = \phi_{12}(\phi_{01}(x, 1), 4s - 2)$.
- etc...
- $\phi(x, 1) = 0$.

où $\phi_{i, i+1}$ est l'homotopie entre $Y_{t_{i+1}, \epsilon_{i+1}}$ et Y_{t_i, ϵ_i} . On voit alors que ϕ est continue sauf peut être pour $s = 1$. On pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\epsilon_n < \epsilon$ et pour tout $s \in [\sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k, 1]$, $|\phi(x, s)| < \epsilon$. Ainsi, ϕ est continue pour $s = 1$. En conséquence, $Y_{t, \epsilon}$ est également contractile.

1.5.4 Dans le cas d'une singularité isolée, le nombre de Milnor est fini.

Rappels sur les variétés algébriques : $N \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est une variété algébrique si $N = Z(I)$ avec I idéal de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$, $I = (g_1, \dots, g_p)$.

THEOREME 1.5.3 (théorème de Nullstellensatz)

$$I(Z(I)) = r(I) = \{f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] / \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^n \in I\}$$

Analogie pour les germes analytiques : $(N, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ défini par des $f_j = 0$, avec $f_j \in \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ tels que $f_j(0) = 0$. On a également le théorème :

THEOREME 1.5.4 (théorème de Nullstellensatz analytique) $I(Z(I)) = r(I)$

Maintenant, on revient au théorème de Milnor. On suppose que 0 est une singularité isolée de \bar{f} et que $f : U \rightarrow V$ est un représentant de \bar{f} . Alors $Z(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) = Z(J(f)) = \{0\}$. D'où pour tout $i = 0, \dots, n$, $x_i \in I(Z(J(f)))$ et donc par le théorème de Nullstellensatz analytique, il existe $l_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_i^{l_i} \in J(f)$. Alors :

$$\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{(x_0^{l_0}, \dots, x_n^{l_n})} \rightarrow \frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{J(f)}$$

est surjective. Et comme $\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{(x_0^{l_0}, \dots, x_n^{l_n})}$ est de dimension finie, le nombre de Milnor $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{J(f)} \right)$ est fini.

REMARQUE 1.5.5 1. $\mu < \infty \Rightarrow$ on peut avoir au plus μ sous espaces vectoriels distincts dans une suite décroissante de sous espaces vectoriels de $\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{J(f)}$ (on peut utiliser le théorème de la base incomplète) et ainsi, ce dernier est artinien.

2. $\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{J(f)}$ algèbre locale.

Démonstration

On sait que (x_0, \dots, x_n) est l'unique idéal maximal de $\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$. Soit J un idéal maximal de $\frac{\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}}{J(f)}$.

- Alors $\pi^{-1}(J)$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\}$. En effet, $I \supset \pi^{-1}(J) \Rightarrow \pi(I) \supset \pi \circ \pi^{-1}(J)$. Or $J \subset \pi \circ \pi^{-1}(J)$ donc $J \subset \pi(I)$ et comme J est maximal, on a $J = \pi(I)$. Dès lors $I \subset \pi^{-1} \circ \pi(I) = \pi^{-1}(J)$ et ainsi $I = \pi^{-1}(J)$.

- Or (x_0, \dots, x_n) unique idéal maximal donc $\pi^{-1}(J) = (x_0, \dots, x_n)$. D'où $J \subset \pi \circ \pi^{-1}(J) = \pi(x_0, \dots, x_n)$ et J maximal donne $J = \pi(x_0, \dots, x_n)$ unique idéal maximal.

□

Chapitre 2

Connexion de Gauss Manin.

Le but de ce paragraphe est de définir la connexion de Gauss Manin. On introduira tout d'abord les collections de classes de cohomologie localement constantes dans le but de définir les sections holomorphes sur le fibré de Gauss Manin GM . Ensuite, on définira le fibré de Gauss Manin. Puis on montrera que \underline{GM} , le faisceau des germes de sections holomorphes sur GM est un \mathcal{O}_D -module localement libre de type fini. Enfin, on définira la connexion de Gauss Manin et l'automorphisme de monodromie.

2.1 Collection de classes de cohomologie localement constante.

Soit $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe et soit Δ un petit disque contenu dans D ne contenant pas 0. Pour Δ assez petit et $s_0 \in \Delta$, par définition de f , on a un difféomorphisme noté ϕ , qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow[\phi]{\cong} & \Delta \times f^{-1}(s_0) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

On a alors la proposition:

PROPOSITION 2.1.1 $i^* : H^n(f^{-1}(\Delta), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(f^{-1}(s_0), \mathbb{C})$ est un isomorphisme, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

On va démontrer que $f^{-1}(s_0)$ est un rétracte par déformation de $f^{-1}(\Delta)$ ce qui donnera directement l'isomorphisme. On a deux applications:

- $i : f^{-1}(s_0) \rightarrow f^{-1}(\Delta)$ l'inclusion canonique.
- $r : f^{-1}(\Delta) \rightarrow f^{-1}(s_0)$ définie par: $r(z) = p_2 \circ \phi(z)$.

On a alors:

- $r \circ i(z) = z$ pour tout $z \in f^{-1}(s_0)$ car $\phi|_{f^{-1}(s_0)} = Id$ (c.f. démonstration du théorème 1.2.1).
- $i \circ r$ application homotope à l'identité via: $H : [0, 1] \times f^{-1}(\Delta) \rightarrow f^{-1}(\Delta)$, définie par:

$$H(t, z) = \phi^{-1}((1-t)f(z) + ts_0, p_2 \circ \phi(z))$$

En effet, on a:

- Pour tout $z \in f^{-1}(s_0)$, $H(t, z) = \phi^{-1}(s_0, p_2 \circ \phi(z)) = \phi^{-1}(s_0, z) = z$.
- Si $t = 0$, $H(0, z) = \phi^{-1}(f(z), p_2 \circ \phi(z)) = z$.
- Si $t = 1$, $H(1, z) = \phi^{-1}(s_0, p_2 \circ \phi(z)) = p_2 \circ \phi(z) = r(z)$.

□

Donc, en prenant $s_1 \in \Delta$, on obtient le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & & H^n(f^{-1}(s_0), \mathbb{C}) \\ & \nearrow \scriptstyle i_{s_0}^* & \downarrow \cong \\ H^n(f^{-1}(\Delta), \mathbb{C}) & & \\ & \searrow \scriptstyle i_{s_1}^* & \\ & & H^n(f^{-1}(s_1), \mathbb{C}) \end{array}$$

qui fournit un isomorphisme:

$$H^n(f^{-1}(s_0), \mathbb{C}) \xrightarrow{\phi_{s_0 s_1}} H^n(f^{-1}(s_1), \mathbb{C})$$

REMARQUE 2.1.2 1. Cet isomorphisme est indépendant du choix de la trivialisatoin. En effet, il est induit par les inclusions naturelles de $f^{-1}(s_0)$ et $f^{-1}(s_1)$ dans $f^{-1}(\Delta)$.

2. Cet isomorphisme n'est autre que celui qui est induit par le difféomorphisme naturel $f^{-1}(s_1) \xrightarrow{\phi|_{X(s_1)}} f^{-1}(s_0)$ fournit par ϕ . On peut démontrer que $i_{s_0} \circ \phi|_{X(s_1)} \sim i_{s_1}$. Ainsi, $\phi|_{X(s_1)}^*$ est indépendante de la trivialisatoin. Démonstrons l'équivalence d'homotopie. On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{h} : X(s_1) \times [0, 1] &\rightarrow f^{-1}(\Delta) \\ (z, t) &\mapsto i_{s(t)} \circ \phi|_{X(s(t))}^{-1} \circ \phi|_{X(s_1)}(z) \\ &\text{avec } s(t) = ts_1 + (1-t)s_0 \end{aligned}$$

- \tilde{h} est continue comme composées d'applications continues.
- $\tilde{h}(z, 0) = i_{s_0} \circ \phi|_{X(s_0)}^{-1} \circ \phi|_{X(s_1)}(z) = i_{s_0} \circ \phi|_{X(s_1)}(z)$
- $\tilde{h}(z, 1) = i_{s_1} \circ \phi|_{X(s_1)}^{-1} \circ \phi|_{X(s_1)}(z) = i_{s_1}(z)$

D'où $i_{s_0} \circ \phi|_{X(s_1)}$ est homotope à i_{s_1} .

On désigne par $X(s)$ la fibre $f^{-1}(s)$. On a la définition suivante:

DEFINITION 2.1.3 Soit $(C_s)_{s \in U}$ une collection de classes de cohomologie, i.e. $C_s \in H^n(X(s), \mathbb{C})$ pour tout $s \in U$. On dira que la collection de classes de cohomologie est localement constante si pour tout $\Delta \subset U$ pour lequel on a une trivialisaton, et pour tout couple $(s_0, s_1) \in \Delta \times \Delta$, C_{s_1} est l'image de C_{s_0} par l'isomorphisme canonique $H^n(X(s_0), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X(s_1), \mathbb{C})$.

REMARQUE 2.1.4 La dimension de $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$ est égale à la dimension de $H_n(X(s_0), \mathbb{C})$, c'est à dire le nombre de Milnor μ (par la dualité donnée par l'intégration et le Théorème de Hurewicz).

Soit $s_0 \in U$ et $C_{s_0}^1, \dots, C_{s_0}^\mu$ une base de $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$. On considère Δ voisinage de s_0 pour lequel on a une trivialisaton et $(C_s^i)_{s \in \Delta}$, $i = 1 \dots, \mu$ les familles localement constantes définies par $C_s^i = \phi_{s_0 s}(C_{s_0}^i)$. On pose alors $\gamma_s = \sum_{j=1}^\mu a_j(s) C_s^j$ décomposition locale.

DEFINITION 2.1.5 On dira que la famille $(\gamma_s)_{s \in U}$ est analytique si et seulement si dans toutes les décompositions locales du type ci-dessus, a_1, \dots, a_μ sont des fonctions holomorphes.

REMARQUE 2.1.6 1. les $(\gamma_s)_{s \in U}$ analytiques vont être les sections holomorphes sur U du fibré de Gauss Manin.

2. L'analyticité définie ci-dessus est une propriété locale sur D^* . Il suffit de la vérifier au voisinage de chaque point de D^* pour une telle décomposition. En effet, on passe d'une décomposition à une autre par multiplication par une matrice inversible à coefficients constants sur le vecteur (a_1, \dots, a_μ) .

Démonstration

Soit $C_{s_0}^1, \dots, C_{s_0}^\mu$ et $\tilde{C}_{s_0}^1, \dots, \tilde{C}_{s_0}^\mu$ deux bases de $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$ et P la matrice de changement de bases de $(C_{s_0}^j)_j$ à $(\tilde{C}_{s_0}^j)_j$ (P est inversible à coefficients constants).

- On a $(C_s)_{s \in U}$ et $(\tilde{C}_s)_{s \in U}$ vérifient $\tilde{C}_s = {}^t P C_s$, pour tout $s \in U$. En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_s^j &= \phi_{s_0 s}(\tilde{C}_{s_0}^j) = \phi_{s_0 s} \left(\sum_{k=1}^\mu p_{kj} C_{s_0}^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^\mu p_{kj} \phi_{s_0 s}(C_{s_0}^k) = \sum_{k=1}^\mu p_{kj} C_s^k \end{aligned}$$

- On a alors

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \sum_{j=1}^\mu \tilde{a}_j(s) \tilde{C}_s^j = \sum_{j=1}^\mu \tilde{a}_j(s) \left(\sum_{k=1}^\mu p_{kj} C_s^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^\mu \left(\sum_{j=1}^\mu p_{kj} \tilde{a}_j(s) \right) C_s^k \end{aligned}$$

et donc $(\tilde{a}_j)_{j=1,\dots,\mu} = P(a_j)_{j=1,\dots,\mu}$ et comme P est une matrice inversible à coefficients constants, \tilde{a}_j analytiques si et seulement si a_j analytiques.

Il suffit donc de vérifier l'analyticité sur une décomposition.

□

2.2 Le fibré de Gauss Manin.

On considère maintenant l'ensemble

$$GM = \bigcup_{s \in D^*} H^n(X(s), \mathbb{C})$$

Dans un premier temps, on donne à GM une structure d'espace étalé \mathcal{E} et on démontre qu'il s'agit d'un système local. Puis on lui donnera une structure de fibré vectoriel. Le fait que \mathcal{E} est un système local permet de définir une connexion intégrable sur le fibré vectoriel GM .

2.2.1 L'espace étalé \mathcal{E}

Définition de la topologie de \mathcal{E} .

On la définit à l'aide de la base d'ouverts suivante: Soit $C = (C_s)_{s \in U}$ une collection de classes de cohomologie localement constante, où U est un ouvert de D^* . On pose alors $W = \{C_s/s \in U\}$. Il faut montrer qu'il s'agit bien d'une base d'ouverts.

Démonstration

Soit $W_1 = \{C_s/s \in U_1\}$ et $W_2 = \{C'_s/s \in U_2\}$. Il faut montrer que $W_1 \cap W_2 = \{C_s = C'_s/s \in U_1 \cap U_2\} = \{C_s/s \in U\}$ est dans la base d'ouverts, où $U = \{s \in U_1 \cap U_2 / C_s = C'_s\}$, c'est à dire que U est un ouvert de D^* . Soit $s_0 \in U$. Alors $C_{s_0} = C'_{s_0}$ et comme les collections sont localement constantes, il existe $\Delta \subset U \cap V$ tel que pour tout $s \in \Delta$, $C_s = C'_s$. Donc $\Delta \subset U$ et ainsi U est un ouvert de D^* .

□

\mathcal{E} est un système local.

On veut démontrer que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow D^*$ est un système local.

– π est continue par définition de la topologie sur \mathcal{E} . On a de plus, pour δ ouvert de D^* , le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{(\pi, \phi_{s_1 s_0})} & \Delta \times \pi^{-1}(s_0) \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

et $(\pi, \phi_{s_1 s_0})$ est un homéomorphisme en munissant $\pi^{-1}(s_0)$ de la topologie discrète. On voit enfin immédiatement que π est surjective. On a donc affaire à un homéomorphisme local surjectif.

– $\pi^{-1}(s) = H^n(X(s), \mathbb{C})$ espace vectoriel pour tout $s \in D^*$.

–

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ \text{et } \cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \end{aligned}$$

sont des applications continues. En effet, on sait que $C_s + C'_s = (C + C')_s$ et $(\lambda C)_s = \lambda C_s$. Soit $W = \{C_s/s \in \Delta\}$ un ouvert de la base d'ouverts de \mathcal{E} formée des $\{C'_s/s \in \Delta\}$ avec Δ ouvert trivialisant. Alors:

$$(+)^{-1}(W) = \bigcup_{C'_{s_0} \in H^n(X(s_0), \mathbb{C})} \{(C'_s, (C - C')_s)/s \in \Delta\} \text{ ouvert de } \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

$$(\cdot)^{-1}(W) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \{\lambda\} \times \{(C/\lambda)_s/s \in \Delta\} \text{ ouvert de } \mathbb{C} \times \mathcal{E} \text{ car } \mathbb{C} \text{ est muni de la topologie discrète.}$$

– Comme les fibres sont isomorphes à \mathbb{C}^μ munies de la topologie discrète, \mathcal{E} est un système local.

2.2.2 $\pi : GM \rightarrow D^*$ fibré vectoriel plat.

Structure différentiable de GM .

On considère $(s_0, C_{s_0}) \in GM$ et la collection de classes de cohomologie localement constante $(C_s)_{s \in \Delta}$ telle que $\phi_{s_0 s}(C_{s_0}) = C_s$, où Δ ouvert trivialisant contenant s_0 . On fixe une base de $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$. On pose alors:

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(\Delta) &\rightarrow \Delta \times \mathbb{C}^\mu \\ C_s &\mapsto (s, \text{coordonnées de } \phi_{s s_0}(C_s) \text{ dans la base de } H^n(X(s_0), \mathbb{C})) \end{aligned}$$

ψ est un homéomorphisme sur son image. On peut ainsi construire un atlas qui muni GM d'une structure de fibré holomorphe. Il faut montrer que les changements de cartes sont des difféomorphismes holomorphes linéaires dans les fibres. En fait, ils correspondent juste à des changements de bases sur \mathbb{C}^μ d'après la remarque 2.1.6 2. On a ainsi une structure de variété lisse.

GM est muni d'une structure de fibré vectoriel plat.

– Montrons que π est une application différentiable.

Soit (W, ψ) une carte de GM . Alors $\pi \circ \psi^{-1}(s, w) = s = p_1(s, w)$. Comme p_1 est lisse, on a π lisse.

– $\pi^{-1}(s) = H^n(X(s), \mathbb{C})$ espace vectoriel pour tout $s \in D^*$.

–

$$\begin{aligned} + : GM \times GM &\rightarrow GM \\ \text{et } \cdot : \mathbb{C} \times GM &\rightarrow GM \end{aligned}$$

sont des applications continues. En effet, on munit cette fois-ci les fibres de la topologie usuelle et le fait que $\phi_{s s_0}$ soit linéaire permet de conclure.

– On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{(\pi, \phi_{s_1 s_0})} & \Delta \times \pi^{-1}(s_0) \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

où $(\pi, \phi_{s_1 s_0})$ est un difféomorphisme.

– Pour tout $s \in \Delta$,

$$\pi^{-1}(s) \xrightarrow{\phi_{s s_0}} \pi^{-1}(s_0)$$

est un isomorphisme linéaire

Ainsi GM est un fibré vectoriel. Le fait que \mathcal{E} soit un système local permet de munir GM d'une connexion intégrable. Dans le prochain paragraphe, on explicitera un peu plus cette connexion. On remarque également que les changements de trivialisations sont constants (c.f. remarque 2.1.6 2). Le fibré GM est donc un fibré vectoriel plat. On en conclut, là encore, que GM peut être muni d'une connexion intégrable.

2.3 Connexion de Gauss Manin.

2.3.1 Le faisceau des sections holomorphes de GM .

DEFINITION 2.3.1 – Une section sur U est une collection de classe de cohomologie $\delta : s \rightarrow \gamma_s$. Il s'agit en fait d'une application $\delta : U \rightarrow GM$ telle que $\pi \circ \delta = id$.

– Une section est dite holomorphe si la famille $(\gamma_s)_{s \in U}$ est analytique (cf définition 2.1.3).

REMARQUE 2.3.2 La définition d'une collection analytique est donnée en fait par la définition de la structure différentiable du paragraphe 2.2.2.

PROPOSITION 2.3.3 \underline{GM} est un faisceau de \mathcal{O} -module localement libre de type fini.

Démonstration

Soit Δ un ouvert trivialisant et $s_0 \in \Delta$. On choisit $(C^i)_{i=1, \dots, \mu}$ une collection de classes de cohomologie sur Δ correspondant à la base $(C_{s_0}^i)_{i=1, \dots, \mu}$. Soit $\Delta' \subset \Delta$ et $\delta \in \underline{GM}(\Delta')$. Alors

$$\delta(s) = \sum_{k=1}^{\mu} a_k(s) C_s^k \text{ avec les } a_k \text{ holomorphes.}$$

On a ainsi un isomorphisme de faisceaux:

$$\underline{GM}|_{\Delta} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{|\Delta}^{\mu}$$

Dès lors \underline{GM} est un faisceau de \mathcal{O} -module localement libre de type fini.

□

2.3.2 Connexion de Gauss Manin.

On a sur GM une connexion naturelle, appelée connexion de Gauss Manin. On l'appelle également connexion transcendante locale.

DEFINITION 2.3.4 *La connexion de Gauss Manin est définie de la façon suivante: les sections horizontales de (GM, ∇) sont les collections de classes de cohomologie localement constantes.*

Rappelons comment est définie ∇ . On a sur Δ ouvert trivialisant: δ section sur Δ s'écrit

$$\delta(s) = \sum_{k=1}^{\mu} a_k(s) C_s^k \text{ où } (C^k)_{k=1, \dots, \mu} \text{ base de collections de classes de cohomologie localement constantes.}$$

On pose alors:

$$\nabla(\delta)(s) = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{da_k}{ds}(s) C_s^k$$

Cette connexion est définie globalement, c'est à dire qu'on a l'égalité dans deux bases différentes. En effet, supposons $\delta = \sum_{k=1}^{\mu} a_k C^k = \sum_{k=1}^{\mu} b_k C'^k$. Alors il existe P matrice à coefficients constants telle que $(a_k)_k = P(b_k)_k$ et on a alors $P \nabla(\delta) = \nabla(P\delta)$. Donc ∇ est définie globalement.

REMARQUE 2.3.5 *Cette connexion est intégrable. En effet, localement, la matrice de la connexion est (0) et vérifie donc la condition d'intégrabilité. On le voyait directement par le fait que les changements de trivialisations de GM sont constants.*

2.3.3 Monodromie.

DEFINITION 2.3.6 *On a un automorphisme de monodromie:*

$$T : H^n(X(s_0), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X(s_0), \mathbb{C})$$

En effet, soit $\rho : \Pi_1(D^*, s_0) \rightarrow GL(H^n(X(s_0), \mathbb{C}))$ la représentation de monodromie de (GM, ∇) . $\Pi_1(D^*, s_0)$ est un groupe libre à un générateur, noté γ . Ainsi, ρ est uniquement déterminé par $\rho(\gamma)$ que l'on note T .

Chapitre 3

Le faisceau HDR .

Le but de ce chapitre est de définir un faisceau HDR . On va dans un premier temps définir le complexe de De Rham holomorphe sur une variété de Stein puis la cohomologie de De Rham relative et le faisceau HDR .

3.1 Complexe de De Rham holomorphe.

Dans ce paragraphe, on rappelle la cohomologie de De Rham d'une variété, la cohomologie de Čech et la cohomologie singulière ainsi que leurs rapports (Théorème de De Rham). Puis on définit la notion de p-formes holomorphes pour introduire un nouveau complexe, le complexe de De Rham holomorphe.

3.1.1 Cohomologie de De Rham d'une variété réelle.

Soit X une variété réelle de dimension n .

1. Le complexe de De Rham:

On considère Ω_X^p le faisceau des p-formes différentielles et d^p la différentielle extérieure. Alors, le lemme de Poincaré nous dit que la suite de faisceaux:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d^0} \Omega_X^1 \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega_X^n \longrightarrow 0$$

est exacte ($\underline{\mathbb{R}}$ désigne le faisceau constant sur \mathbb{R}). Ce complexe est appelé complexe de De Rham (c'est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$).

2. Cohomologie de De Rham:

On définit le q-ième groupe de cohomologie de De Rham par:

$$H^q(\Omega(X)) := \frac{\ker d^q(X)}{\operatorname{im} d^{q+1}(X)}$$

où $\Omega(X)$ est l'ensemble des p-formes différentielles sur X .

3. Cohomologie de Čech à valeur dans le faisceau \mathcal{F} :

On considère un recouvrement ouvert de X que l'on note \mathcal{U} . On lui associe le complexe de Čech:

$$0 \rightarrow \prod \Gamma(U_{i_0}, \mathcal{F}) \rightarrow \prod \Gamma(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \prod \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{n+1}}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

où l'opérateur de cobord est défini par:

$$d_n(f)_{i_0 \dots i_{n+1}} = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l f_{i_0 \dots \hat{i}_l \dots i_{n+1}} | U_{i_0 \dots i_{n+1}}$$

On pose alors:

- $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_{i_0 \dots i_n}, \mathcal{F})$
- $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker d_q$ ensemble des q-cocycles.
- $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{im } d_{q-1}$ ensemble des q-cobords.

On définit alors le q-ième groupe de Cech de \mathcal{U} à valeur dans \mathcal{F} :

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$$

Ensuite, on regarde l'ensemble des recouvrements ouverts de X muni de la relation d'ordre de finesse et on définit le q-ième groupe de cohomologie de Cech de l'espace X à valeur dans \mathcal{F} comme étant la limite inductive des groupes de cohomologie associés à un recouvrement.

4. Cohomologie singulière:

Pour définir cette cohomologie, il faut tout d'abord définir l'homologie singulière.

- (a) On considère $e_0 = (0, \dots)$ et $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ la base canonique de \mathbb{R}^∞ . Le q-simplexe standard Δ_q engendré par e_0, \dots, e_q est l'enveloppe convexe de $\{e_0, \dots, e_q\}$.
- (b) Un q-simplexe singulier de X est une application continue $\sigma_q : \Delta_q \rightarrow X$. On appelle $S_q(X)$ le groupe abélien libre engendré par les q-simplexes singuliers. Les éléments de ce groupe sont appelés des q-chaines singulières.
- (c) Le bord du q-simplexe singulier σ_q est la (q-1)-chaîne singulière définie par:

$$\partial(\sigma_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_q^i = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q^i$$

où

$$F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q \quad i \in \{0, \dots, q\}$$

$$e_j \mapsto \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases}$$

On a alors le complexe:

PROPOSITION 3.1.1 $(S(X), \partial)$ est un complexe de chaîne, i.e. $\partial \circ \partial = 0$.

Pour définir la cohomologie singulière, on considère les espaces duaux. On définit:

- L'ensemble des q-cochaines comme l'espace $S^q(X) = \text{Hom}(S_q(X), k)$.

- l'opérateur de cobord est la transposée de l'opérateur bord, c'est à dire δc est défini par $\langle \sigma, \delta c \rangle = \langle \partial \sigma, c \rangle$.

On définit alors comme d'habitude les cocycles, cobords puis les groupes de cohomologie $H^q(X, k)$ associé au complexe $(S^q(X), \delta)$. On a alors le théorème suivant:

THEOREME 3.1.2 *Soit X une variété lisse. Alors, $\check{H}^q(X, \mathbb{C}) \cong H^q(X, \mathbb{C})$.*

THEOREME 3.1.3 *Si k est un corps, on a $H^q(X, k) \cong (H_q(X, k))^*$.*

(c.f. MILNOR-STASHEFF: *Characteristic classes (Annals of mathematics studies, 1974)*)

5. Rapport entre complexe de De Rham, cohomologie de Čech et cohomologie singulière.

THEOREME 3.1.4 (Théorème de De Rham) $H^i(\Omega(X)) \cong \check{H}^i(X, \mathbb{C})$ pour tout $i \geq 0$.
De même, $H^i(\Omega(X)) \cong H^i(X, \mathbb{C})$ pour tout $i \geq 0$.

6. La dualité de Poincaré est donnée par l'application bilinéaire non dégénérée:

$$H^q(\Omega(X), \mathbb{C}) \times H^{n-q}(\Omega(X), \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$[w], [\eta] \mapsto \int_X w \wedge \eta$$

On a ainsi: $H_c^{n-q}(\Omega(X), \mathbb{C}) \cong (H^q(\Omega(X), \mathbb{C}))^* \cong H_q(X, \mathbb{C})$.

3.1.2 Complexe de De Rham holomorphe.

On considère maintenant X une variété complexe de dimension n .

1. Soit $f \in C^\infty(X, \mathbb{C})$. On veut définir f holomorphe. On considère U_i un ouvert de carte de X . Soit $dz_k = dx_k + idy_k$ et $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$. Pour $f \in C^\infty(X)$, on a:

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \partial_k f dz_k + \sum_{k=1}^n \bar{\partial}_k f d\bar{z}_k$$

$$= \partial f + \bar{\partial} f$$

DEFINITION 3.1.5 *On dit qu'une fonction lisse f est holomorphe si et seulement si $\bar{\partial} f = 0$.*

2. On va maintenant définir le complexe de De Rham holomorphe sur X . On pose:

$$\mathcal{A}_{X, \mathbb{C}}^{p, q} = \{w = \sum a_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J, |I| = p, |J| = q \text{ et } a_{IJ} \text{ lisse}\}$$

et on définit $dw = d'w + d''w$ avec

$$d'w = d' \left(\sum a_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) = \sum \partial(a_{IJ}(z) dz_I) \wedge d\bar{z}_J$$

$$\text{et } d''w = d'' \left(\sum a_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) = \sum (-1)^{|I|} dz_I \wedge \bar{\partial}(a_{IJ}(z) d\bar{z}_J)$$

On définit enfin

$$\mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^d = \bigoplus_{p+q=d} \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,q}$$

REMARQUE 3.1.6 On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,q} & \xrightarrow{d'} & \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p+1,q} \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,q+1} & \xrightarrow{d'} & \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p+1,q+1} \end{array}$$

LEMME 3.1.7 $d'^2 = d''^2 = d''d' + d'd'' = 0$

Démonstration

Il suffit de vérifier les égalités pour les termes de la forme:

$$w = a(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

-

$$\begin{aligned} (d''d' + d'd'')(a(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J) &= d'' \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) + d' \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} d\bar{z}_j \wedge dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J + \frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &= 0 \text{ (car } a \text{ est lisse donc } \frac{\partial^2 a}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \text{)}. \end{aligned}$$

- $d' \circ d'(a(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial z_j} dz_i \wedge dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$. Les termes diagonaux s'annulent et les autres s'annulent deux à deux car $\frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial z_j} dz_i \wedge dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = -\frac{\partial^2 a}{\partial z_j \partial z_i} dz_j \wedge dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$.

- On fait le même calcul pour $d''^2 = 0$.

□

DEFINITION 3.1.8 On définit l'ensemble des p -formes holomorphes:

$$\Omega_X^p = \left\{ \sum u_I dz_I \text{ avec } u_I \text{ holomorphe} \right\}$$

On remarque qu'alors:

PROPOSITION 3.1.9 $\Omega_X^p = \ker(d'' : \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,1})$

Démonstration

– Soit $\sum u_I dz_I \in \Omega_X^p$.

$$\begin{aligned} d'' \left(\sum_I u_I dz_I \right) &= \sum_I d'' (u_I(z) dz_I) \\ &= \sum_I (d'' (u_I(z)) \wedge dz_I) \\ &= 0 \text{ car } u_I \text{ est holomorphe.} \end{aligned}$$

D'où $\Omega_X^p \subset \ker(d'' : \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,1})$.

– Soit $\sum u_I dz_I \in \ker(d'' : \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{p,1})$. Alors

$$\sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_I(z)}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \right) \wedge dz_I = 0$$

D'où $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_I(z)}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = 0$, pour tout I . Dès lors les u_I sont holomorphes et on a ainsi l'égalité.

□

DEFINITION 3.1.10 (Ω_X^\bullet, d) est appelé complexe de De Rham holomorphe.

REMARQUE 3.1.11 (a) $d|_{\Omega_X^\bullet} = d'$ car $d''|_{\Omega_X^\bullet} = 0$ par la proposition précédente.

(b) Soit $\sum u_I dz_I \in \Omega_X^p$. Alors $d'' \circ d' (\sum u_I dz_I) = -d' \circ d'' (\sum u_I dz_I) = -d' (0) = 0$. Donc $d(\sum u_I dz_I) = d' (\sum u_I dz_I) \in \Omega_X^{p+1}$. Ainsi, le complexe de De Rham holomorphe est bien défini.

3.2 Complexe de De Rham holomorphe sur une variété de Stein.

Toutes les variétés avec lesquelles on va travailler sont des variétés de Stein. Ces variétés permettent d'avoir non seulement des conséquences sur les sections, mais aussi un résultat analogue au théorème de De Rham dans le cas des p-formes holomorphes.

3.2.1 Variété de Stein.

DEFINITION 3.2.1 X est dite de Stein si et seulement si pour tout $i > 0$ et pour tout \mathcal{F} faisceau cohérent, $\hat{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

REMARQUE 3.2.2 Être de Stein donne des propriétés intéressantes sur les sections. En effet, si on considère une suite exacte courte de faisceaux avec \mathcal{F}_1 cohérent

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

alors on a la suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}_1) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}_2) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}_3) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}_1) \rightarrow \dots$$

Or $\check{H}^0(X, \mathcal{F}_i) = \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\check{H}^1(X, \mathcal{F}_1) = 0$ car X est de Stein et \mathcal{F}_1 cohérent. D'où:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \rightarrow 0$$

EXEMPLE 3.2.3 – Un ouvert de \mathbb{C} est une variété de Stein.

- Une boule de \mathbb{C}^n est une variété de Stein.
 - Une intersection de variétés de Stein est de Stein.
 - L'image réciproque d'une sous-variété de Stein par une submersion holomorphe entre deux variétés de Stein est une variété de Stein.
- Conséquence: La fibre de la fibration de Milnor est une variété de Stein. Et pour Δ ouvert de D^* , $f^{-1}(\Delta)$ est une variété de Stein.

3.2.2 Complexe de De Rham holomorphe sur une variété de Stein.

Soit X une variété complexe de Stein de dimension n .

- Si on voit X comme une variété réelle de dimension $2n$,

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_X^{2n} \rightarrow 0$$

est une résolution.

- Dans le cas d'une variété complexe, la séquence

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_X^0 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow 0$$

est également une résolution. En effet, on a:

LEMME 3.2.4 (Lemme de Poincaré holomorphe.) Soit U un ouvert étoilé de X . Si $\alpha \in \Omega_X^p(U)$ est une p -forme holomorphe fermée alors α est exacte.

Démonstration

On va utiliser le lemme suivant:

LEMME 3.2.5 Soient J_i , $i = 0, 1$, les injections de U dans $U \times \mathbb{R}$ définies par $J_i(z) = (z, i)$. Il existe une application linéaire (sur \mathbb{R}) définie sur le sous ensemble M de $\mathcal{A}_X^p(U \times \mathbb{R})$ des formes différentielles lisses par rapport à t et holomorphes par rapport aux autres variables:

$$K : M \rightarrow \Omega_X^p(U)$$

telle que $dK + Kd = J_1^* - J_0^*$.

La démonstration est une adaptation de la démonstration classique du lemme de Poincaré en réel.

Démonstration

On désigne par t la coordonnée canonique sur le facteur \mathbb{R} de $U \times \mathbb{R}$. On notera $\mathcal{O}(U \times \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f(x, t)$ globalement lisses et holomorphes en x . On définit une application linéaire K par:

$$\begin{aligned} K(f) &= 0 & \text{si } f \in \mathcal{O}(U \times \mathbb{R}) \\ K(\alpha) &= 0 & \text{si } \alpha = adz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \text{ avec } a \in \mathcal{O}(U \times \mathbb{R}) \\ K(\beta) &= \left(\int_0^1 b dt \right) dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} & \text{si } \beta = b dt \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} \text{ avec } b \in \mathcal{O}(U \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} - dK(f) + K(df) &= 0 + \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) = (J_1^* - J_0^*)(f). \\ - dK(\alpha) + K(d\alpha) &= 0 + \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{p-1}} = (J_1^* - J_0^*)(\alpha). \\ - \text{On remarque tout d'abord que } b \text{ holomorphe en } x \text{ sur } U \times \mathbb{R} \text{ implique} \\ & \int_0^1 b dt \text{ est holomorphe sur } U. \text{ De plus, } J_1^*(\beta) = J_0^*(\beta) = 0 \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \circ K(\beta) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial z_i} dt \right) dz_i \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} \\ K \circ d(\beta) &= K \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial z_i} dz_i \wedge dt \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n K \left(\frac{\partial b}{\partial z_i} dt \wedge dz_i \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial z_i} dt \right) \wedge dz_i \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{p-1}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (d \circ K + K \circ d)(\beta) = (J_1^* - J_0^*)(\beta).$$

□

Soit α une forme holomorphe fermée de degré p sur U . On désigne par H l'application de $U \times [0, 1]$ dans U définie par $H(x_1, \dots, x_n, t) = (tx_1, \dots, tx_n) + a$, où $a \in U$ est tel que pour tout $x \in U$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $a + (tx_1, \dots, tx_n) \in U$. On a

$$H \circ J_1(x_1, \dots, x_n) = a + (x_1, \dots, x_n) \text{ et } H \circ J_0(x_1, \dots, x_n) = a$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \alpha &= (J_1^* - J_0^*) \circ H^*(\alpha) \\ &= dK(H^*(\alpha)) + K(d(H^*(\alpha))) \\ &= dK(H^*(\alpha)) + K(H^*(d(\alpha))) \\ &= dK(H^*(\alpha)) \end{aligned}$$

D'où α est exacte.

□

Ainsi

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_X^0 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow 0$$

est une résolution mais elle n'est, en général, pas acyclique. Si X est de Stein, par définition, elle vérifie le théorème B de Cartan:

THEOREME 3.2.6 (théorème B de Cartan) *Pour toute variété de Stein, on a: $\check{H}^i(X, \Omega_X^j) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $j \geq 0$.*

Alors le complexe est acyclique ce qui permet de démontrer:

THEOREME 3.2.7 (Théorème de De Rham holomorphe) *Pour $p \geq 1$,*

$$\check{H}^p(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong \frac{\ker d : H^0(X, \Omega_X^p) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^{p+1})}{d(H^0(X, \Omega_X^{p-1}))} \text{ et } \check{H}^0(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong \ker d : H^0(X, \Omega_X^0) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)$$

Démonstration

Pour démontrer ce théorème, on utilise:

THEOREME 3.2.8 (Théorème de De Rham abstrait.) *Soit une résolution acyclique du faisceau \mathcal{S} :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{t^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{t^1} \dots$$

Alors pour tout $p \geq 1$, $\check{H}^p(X, \mathcal{S}) \cong \frac{\ker t_*^p}{\text{im } t_*^{p-1}}$ et $\check{H}^0(X, \mathcal{S}) \cong \ker t_*^0$, où

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{S}, X) \xrightarrow{i_*} \Gamma(\mathcal{F}^0, X) \xrightarrow{t_*^0} \Gamma(\mathcal{F}^1, X) \xrightarrow{t_*^1} \dots$$

Dans notre cas, on a la résolution acyclique car X est de Stein:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_X^0 \xrightarrow{d^0} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega_X^n \longrightarrow 0$$

Alors d'après le théorème de De Rham abstrait:

$$\check{H}^p(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong \frac{\ker d_*^p : H^0(X, \Omega_X^p) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^{p+1})}{d_*^{p-1}(H^0(X, \Omega_X^{p-1}))}$$

$$(H^0(X, \Omega_X^p) = \Gamma(\Omega_X^p, X)).$$

□

EXEMPLE 3.2.9 *On va montrer que $P^1(\mathbb{C}) \cong S^2$ ne vérifie pas le théorème de De Rham. Il ne s'agit donc pas d'une variété de Stein.*

1. Atlas de $P^1(\mathbb{C})$:

(U, ϕ_1) et (V, ϕ_2) forment un atlas de $P^1(\mathbb{C})$ où

- $U = \{(x : y) \in P^1(\mathbb{C}) / y \neq 0\}$,
- $V = \{(x : y) \in P^1(\mathbb{C}) / x \neq 0\}$,
- $\phi_1 : U \rightarrow \mathbb{C}; (x : y) \mapsto \frac{x}{y}$,
- $\phi_2 : V \rightarrow \mathbb{C}; (x : y) \mapsto \frac{y}{x}$.

2. Calcul de $H^0(S^2, \Omega^0)$, $H^0(S^2, \Omega^1)$, $H^0(S^2, \Omega^2)$.

- $H^0(S^2, \Omega^0) = \Gamma(S^2, \Omega^0) = \mathbb{C}$ car f est holomorphe sur $P^1(\mathbb{C})$ compact implique f constante sur S^2 (principe du maximum).
- $H^0(S^2, \Omega^1) = \Gamma(P^1(\mathbb{C}), \Omega^1) = 0$ car $w \in \Gamma(P^1(\mathbb{C}), \Omega^1)$ s'écrit sur $U \cap V$ $w = f(x)dx = g(y)dy = g(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})dx$ d'où $f = g = 0$ car f et g sont holomorphes.
- $H^0(S^2, \Omega^2) = 0$ car $\Omega_{S^2}^2 = 0$.

3. Calcul de $\check{H}^0(S^2, \underline{\mathbb{C}})$, $\check{H}^1(S^2, \underline{\mathbb{C}})$, $\check{H}^2(S^2, \underline{\mathbb{C}})$.

- $\check{H}^0(S^2, \underline{\mathbb{C}}) = \Gamma(S^2, \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}$, car S^2 est connexe.
- Pour calculer $\check{H}^1(S^2, \underline{\mathbb{C}})$, d'après le théorème 3.1.2, il suffit de connaître le groupe de cohomologie singulière $H^1(S^2, \mathbb{C})$ et par le théorème 3.1.3, il est isomorphe à $(H_1(S^2, \mathbb{C}))^*$. Or, $H_1(S^2, \mathbb{C}) = (0)$ d'où $\check{H}^1(S^2, \underline{\mathbb{C}}) = (0)$.
- Pour calculer $\check{H}^2(S^2, \underline{\mathbb{C}})$, on remarque que $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ et par la définition de la cohomologie singulière et l'isomorphisme avec la cohomologie de Čech, on a $\check{H}^2(S^2, \underline{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$.

4. Ainsi, $P^1(\mathbb{C})$ contredit le théorème de De Rham. Il ne s'agit donc pas d'une variété de Stein.

3.3 Cohomologie de De Rham relative et faisceau HDR.

Dans ce paragraphe, on introduit de nouveaux complexes: le complexe de De Rham relatif, puis le complexe DR . Enfin, on définit les faisceaux $H^i DR$ qui sont tous nuls sauf pour $i = 0, n$. On notera HDR le faisceau $H^n DR$ qui est un faisceau cohérent libre de rang μ .

3.3.1 Cohomologie de De Rham relative.

On considère $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor du germe de fonction holomorphe \bar{f} et on définit:

DEFINITION 3.3.1 *Le faisceau des p -formes holomorphes relatives est:*

$$\Omega_{X/D}^0 = \mathcal{O}_X \text{ et } \Omega_{X/D}^p = \frac{\Omega_X^p}{df \wedge \Omega_X^{p-1}} \text{ pour tout } p \geq 1$$

La différentielle est induite par la différentielle usuelle par passage au quotient. On pose $d_{X/D}(\bar{w}) = \overline{dw}$.

LEMME 3.3.2 $d_{X/D}$ est bien définie et est \mathcal{O}_D -linéaire, où \mathcal{O}_D est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $D \subset \mathbb{C}$, qui agit sur Ω_X et $\Omega_{X/D}$ de la façon suivante: $k \in \mathcal{O}_D$ et $w \in \Omega_X$ (resp. $\Omega_{X/D}$), $(kw)(x) = k(f(x))w(x)$.

Démonstration

1. Soit $w \in \Omega_X^p$ et $\alpha \in \Omega_X^{p-1}$

$$\begin{aligned} d_{X/D}(\overline{w + df \wedge \alpha}) &= \overline{dw + d(df \wedge \alpha)} \\ &= \overline{dw - df \wedge d\alpha} \\ &= \overline{dw} \\ &= d_{X/D}(\overline{w}) \end{aligned}$$

Dès lors $d_{X/D}$ est bien définie.

2. Soit $k \in \mathcal{O}_D$ et $w \in \Omega_{X/D}^p$

$$\begin{aligned} d_{X/D}(k\overline{w}) &= \overline{d(kw)} = \overline{d((k \circ f).w)} = \overline{(k' \circ f).df \wedge w + (k \circ f).dw} \\ &= \overline{df \wedge (k' \circ f).w + (k \circ f).dw} = \overline{(k \circ f).dw} \\ &= (k \circ f).\overline{dw} = k\overline{dw} = kd_{X/D}(\overline{w}) \end{aligned}$$

D'ou la \mathcal{O}_D -linéarité.

□

On dispose maintenant d'un complexe de De Rham relatif:

$$\Omega_{X/D}^0 \xrightarrow{d_{X/D}} \Omega_{X/D}^1 \xrightarrow{d_{X/D}} \dots \xrightarrow{d_{X/D}} \Omega_{X/D}^n \xrightarrow{d_{X/D}} \Omega_{X/D}^{n+1}$$

REMARQUE 3.3.3 Il s'agit bien d'un complexe car $d_{X/D} \circ d_{X/D}(\overline{w}) = d_{X/D}(\overline{dw}) = \overline{ddw} = 0$.

LEMME 3.3.4 $df \wedge \Omega_X^n = J(f)dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Démonstration

- Soit $w = \sum \alpha_I dz_I \in \Omega_X^n$. Alors

$$\begin{aligned} df \wedge w &= \sum_{(i,I) \subset \{0, \dots, n\}} \frac{\partial f}{\partial z_i} \alpha_I dz_i \wedge dz_I \\ &= \sum_{\{i\} \cup I = \{0, \dots, n\}} (-1)^i \frac{\partial f}{\partial z_i} \alpha_I dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= \left(\sum_{\{i\} \cup I = \{0, \dots, n\}} (-1)^i \frac{\partial f}{\partial z_i} \alpha_I \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \in J(f)dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

- Soit $w \in J(f)dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$. Alors:

$$\begin{aligned} w &= \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= df \wedge \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_n \in df \wedge \Omega_X^n \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

□

REMARQUE 3.3.5 $\Omega_{X/D}^{n+1}$ est concentré en 0. En effet, si $x \neq 0$, il existe Δ_x voisinage ouvert de x dans $X - \{0\}$ tel que dans un système de coordonnées convenable, $f|_{\Delta_x}(z_0, \dots, z_n) = z_0$. Alors à $(\bar{\alpha})_x \in (\Omega_{X/D}^{n+1})_x$, on associe un représentant $\bar{\alpha} \in \Omega_{X/D}^{n+1}(\Delta')$ avec $\Delta' \subset \Delta_x$ et $\alpha \in \Omega_X^{n+1}(\Delta')$. Dès lors, $\alpha = a(\underline{z})dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n = a(\underline{z})df \wedge \dots \wedge dz_n$. D'où $\bar{\alpha} = 0$ et alors $(\bar{\alpha})_x = 0$.

Si $x = 0$, d'après ce qui précède, $(\Omega_{X/D}^{n+1})_0 \cong \left(\frac{\Omega_X^{n+1}}{J(f) \wedge \Omega_X^n} \right)_0 \cong \left(\frac{\mathcal{O}}{J(f)} \right)_0$ qui n'est pas nul dès que $d_0 f = 0$.

LEMME 3.3.6 $0 \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_D) \rightarrow \Omega_{X/D}^0 \rightarrow \Omega_{X/D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X/D}^n \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux sur $X - \{0\}$.

Démonstration

1. Pour $p \geq 1$. On fait une démonstration analogue à celle du lemme de Poincaré classique. Soit $x \in X - \{0\}$. Alors il existe Δ_x voisinage de x dans $X - \{0\}$ tel que dans un système de coordonnées convenable, $f|_{\Delta_x} = p_1$ et $\Delta_x = \Delta_{x_0} \times \dots \times \Delta_{x_n}$. On définit $J_1(z_0, \dots, z_n) = (z_0, \dots, z_n, 1)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $J_0(z_0, \dots, z_n) = (z_0, \dots, z_n, 0)$. On cherche K tel que

$$\begin{aligned} & - K : \Omega_X^{p+1}(\Delta_{x_0} \times \dots \times \Delta_{x_n} \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_X^p(\Delta_{x_0} \times \dots \times \Delta_{x_n}) \\ & - d'K + Kd' = J_1^* - J_0^* \text{ avec } d' \text{ dérivation par rapport à } z_1, \dots, z_n. \end{aligned}$$

(cf démonstration du lemme de Poincaré version holomorphe). On désigne par $H : \Delta_{x_0} \times \dots \times \Delta_{x_n} \times [0, 1] \rightarrow \Delta_{x_0} \times \dots \times \Delta_{x_n}$ l'application telle que

$$H(z_0, \dots, z_n, t) = (z_0, tz_1, \dots, tz_n) + x$$

où pour tout $z \in \Delta_x$, $x + (z_0, tz_1, \dots, tz_n) \in \Delta_x$. On a alors, pour α représentant d'un élément de $(\Omega_{X/D}^p)_x$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \overline{(J_1^* - J_0^*) \circ H^*(\alpha)} \\ &= \overline{d'K(H^*(\alpha)) + K(d'(H^*(\alpha)))} \\ &= \overline{dK(H^*(\alpha)) + K \circ H^*(d'(\alpha))} \\ &= \overline{dK(H^*(\alpha)) + dz_0 \wedge K(H^*(d'(\eta)))} \text{ où } d'\alpha = dz_0 \wedge \eta \text{ car } \alpha \text{ est } d_{X/D}\text{-fermée.} \\ &= \overline{dK(H^*(\alpha))} \end{aligned}$$

Ainsi α est exacte.

2. Il s'agit de chercher un germe de fonction holomorphe g tel que $dg = hdf$, c'est-à-dire $dg \wedge df = 0$. Or pour tout $x \in X - \{0\}$, il existe Δ_x ouvert de X tel que dans un système de coordonnées convenable, $f(z_0, \dots, z_n) = z_0$ (car f est une submersion). Mais alors dans ce système de coordonnées, on a $dg \wedge dz_0 = 0$ et ainsi, g ne dépend que de z_0 , i.e. $g \in f^{-1}(\mathcal{O}_D)_x$.

□

On a de plus:

LEMME 3.3.7 $0 \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_D)_0 \rightarrow \Omega_{X/D}^0 \rightarrow \Omega_{X/D}^1$ est exacte.

Démonstration

Soit $g \in \Omega_{X/D,0}^0$. On considère un représentant de g sur X' de sorte que $f|_{X'}$ soit un représentant de Milnor de \bar{f} . En effet, il s'agit de chercher des fonctions g telle que $dg = hdf$, c'est à dire $dg \wedge df = 0$. Or pour tout $x \in X' \setminus \{0\}$, il existe Δ_x ouvert de X' tel que dans un système de coordonnées convenable, $f(z_0, \dots, z_n) = z_0$ (car f est une submersion). Mais alors dans ce système de coordonnées, on a $dg \wedge dz_0 = 0$ et ainsi, g ne dépend que de z_0 . Comme les fibres $f^{-1}(c)$ sont connexes pour $c \neq 0$, on a l'existence de $\tilde{g} : D'^* \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que $g(x) = \tilde{g} \circ f(x)$ pour tout $x \in X' \setminus f^{-1}(0)$. On prolonge alors \tilde{g} sur D' en utilisant un point lisse de $f^{-1}(0)$ et on a $\tilde{g} \circ f$ holomorphe sur X . Or $f^{-1}(0)$ est mince et le prolongement de $g|_{X' \setminus f^{-1}(0)}$ holomorphe en une fonction holomorphe étant unique, on a $g(x) = \tilde{g} \circ f(x)$ pour tout $x \in X'$. Et ainsi, g est une fonction de $f^{-1}(\mathcal{O}_D)_0$ (qui vient d'en bas). □

3.3.2 Faisceau HDR

DEFINITION 3.3.8 Soit $m : A \rightarrow B$ un morphisme et considérons un faisceau \mathcal{F} de base A . On appelle image directe de \mathcal{F} par m et on note $m_*\mathcal{F}$, le faisceau de base B défini par $(m_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(m^{-1}(U))$ et pour tout $U' \subset U''$, on définit l'application de restriction $m_*\mathcal{F}(U'') \rightarrow m_*\mathcal{F}(U')$ comme étant l'application de restriction $\mathcal{F}(m^{-1}(U'')) \rightarrow \mathcal{F}(m^{-1}(U'))$.

REMARQUE 3.3.9 On a en fait défini un préfaisceau mais les axiomes de faisceau sont préservés.

DEFINITION 3.3.10 On désignera par DR le complexe de De Rham relatif $(f_*(\Omega_{X/D}^\bullet), d_{X/D})$.

$$f_*(\Omega_{X/D}^0) \rightarrow \dots \rightarrow f_*(\Omega_{X/D}^{n+1}) \rightarrow 0$$

DEFINITION 3.3.11 On note $H^i DR$ les faisceaux sur D de cohomologie du complexe DR . $H^i DR$ est le faisceau associé au préfaisceau:

$$\overline{H^i DR} = \frac{\ker d_{X/D} : f_*(\Omega_{X/D}^i) \rightarrow f_*(\Omega_{X/D}^{i+1})}{\text{im } d_{X/D} : f_*(\Omega_{X/D}^{i-1}) \rightarrow f_*(\Omega_{X/D}^i)}$$

On admettra les deux théorèmes suivant:

THEOREME 3.3.12 Les faisceaux $H^i DR$ sont cohérents pour tout i . De plus, ils sont nuls pour $0 < i < n$.

On désignera donc simplement par HDR le faisceau $H^n DR$ sur D . On a alors:

THEOREME 3.3.13 Le faisceau HDR est libre sur \mathcal{O}_D de rang μ .

En fait, Brieskorn a démontré dans [2] que le faisceau $\frac{HDR}{\text{torsion}(HDR)}$ était libre de rang μ et Sebastiani a prouvé dans [4] que $\text{torsion}(HDR) = 0$ ce qui donne à HDR une structure de faisceau libre de rang μ .

REMARQUE 3.3.14 *Un élément de $f_*(\Omega_{X/D}^p)(\Delta)$ est une collection $(f_i)_{i \in I}$ de p -formes holomorphes sur U_i avec $\cup U_i = f^{-1}(\Delta)$ tel que $f_i - f_j = df \wedge \alpha_{ij}$ sur $U_i \cap U_j$.*

Chapitre 4

Etude comparée de GM et HDR .

4.1 Isomorphisme entre les sections holomorphes de GM et la restriction du faisceau HDR à D^* .

Le but de ce chapitre est de définir un isomorphisme entre la restriction du faisceau HDR à D^* et le faisceau des sections holomorphes de GM . Le résultat principal de ce paragraphe est donc:

THEOREME 4.1.1 *La restriction du faisceau HDR à D^* est canoniquement isomorphe au faisceau des germes de sections holomorphes de GM .*

Pour démontrer ce théorème, on va commencer par établir un certain nombre de résultats:

LEMME 4.1.2 *Soit X une variété analytique complexe et $f : X \rightarrow \Delta$ une application holomorphe telle que df ne s'annule pas. Considérons η une forme lisse à support propre, d -fermée, de degré n , et w une n -forme holomorphe sur X telle que $dw = df \wedge \alpha$ où α est une n -forme holomorphe.*

Notons $a(s) = \int_{f=s} w \wedge \eta$. Alors:

1. a est holomorphe.
2. $\frac{\partial a}{\partial s}(s) = \int_{f=s} \alpha \wedge \eta = \int_{f=s} \frac{dw}{df} \wedge \eta$ (notation usuelle).

Démonstration

1. (a) Montrons tout d'abord que a est de classe C^∞ .
 - On s'arrange pour avoir un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que tout compact de X ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement et tel que les U_i vérifient la propriété (P) : dans un système de coordonnées convenable, U_i est de la forme $\Delta_i \times V_i$

et dans ce même système, $f|_{U_i}$ est la projection de la première coordonnée. On considère une suite exhaustive de compacts de X , $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ avec X_n inclu dans l'intérieur de X_{n+1} . En particulier, pour tout compact K , il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset X_n$. On commence alors à recouvrir X_0 par des ouverts U_i vérifiant (P). Pour cela, on considère chaque point de X_0 et on trouve un U_i vérifiant (P) en remarquant que f est une submersion. Mais X_0 est compact donc peut être recouvert par un nombre fini de ces U_i . On recouvre alors $X_1 \setminus \overset{\circ}{X}_0$ par des ouverts ayant la propriété (P) et inclu dans $\text{int}(X_2)$. $X_1 \setminus \overset{\circ}{X}_0$ est encore un compact. On ne garde donc qu'un nombre fini de ces ouverts. On remarque alors que X_1 est recouvert par un nombre fini d'ouverts vérifiant (P). On recouvre $X_2 \setminus \overset{\circ}{X}_1$ par des ouverts U_i vérifiant (P) et tels que $U_i \subset \overset{\circ}{X}_3$ et $U_i \cap X_0 = \emptyset$. On en garde là encore qu'un nombre fini car $X_2 \setminus \overset{\circ}{X}_1$ est compact. Et ainsi de suite. On a ainsi un recouvrement de X dont les éléments vérifient (P) et tel que tout compact, en particulier $f^{-1}(s) \cap (\text{supp } \eta)$, ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement.

- On considère alors $(g_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Par définition, on a

$$\int_{f=s} w \wedge \eta = \sum_{i \in I} \int_{(f=s) \cap U_i} g_i \cdot w \wedge \eta$$

Sur U_i , on a le changement de coordonnées qui rend f projection. D'où:

$$\int_{(f=s) \cap U_i} g_i(x)(w \wedge \eta)(x) = \int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y)$$

- 1^{er} cas: $w \wedge \eta = df \wedge \dots$ alors $\int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y) = 0$.
- 2^{em} cas: $w \wedge \eta \neq df \wedge \dots$ alors $g_i(y)(w \wedge \eta)(y)$ est une forme lisse à support compact dans U_i . Donc il existe $K_i \subset \Delta_i$ compact tel que en dehors de ce compact $\int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y) = 0$. Ainsi, l'intégrale se prolongera à Δ tout entier de manière lisse. Il reste à montrer que cette intégrale est lisse sur K_i . Or $g_i(y)(w \wedge \eta)(y)$ est lisse et à support compact donc intégrable ainsi que toutes ses dérivées et donc $\int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y)$ est lisse.

D'où a est lisse (on a une somme finie sur i car $f^{-1}(s) \cap (\text{supp } \eta)$ est compact et donc ne rencontre qu'un nombre fini de U_i).

- (b) Il reste à montrer que $d''a = 0$. Pour le faire, on va calculer la dérivée au sens des distributions de a . On a $d''a = \frac{\partial a}{\partial \bar{s}}$. On définit la distribution: Pour $\Theta \in C_c^\infty(\Delta)$,

$$\begin{aligned} T_{\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}}(\Theta) &= \int_{\Delta} \frac{\partial a}{\partial \bar{s}} d\bar{s} \wedge \Theta(s) ds \\ &= \int_{\Delta} d(a\Theta ds) - \int_{\Delta} a \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{s}} d\bar{s} \wedge ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}}(\Theta) &= \int_{\partial \Delta} a \Theta ds - \int_{\Delta} ad(\Theta(s)ds) && \text{par Stokes appliqué à } \Delta. \\
&= - \int_{\Delta} ad(\Theta(s)ds) && \text{car } \Theta \text{ à support compact dans } \Delta \\
&= - \int_{\Delta} \left(\sum_{i \in I} \int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y) \right) d(\Theta(s)ds) && \text{par définition de } a \\
&= - \sum_{i \in I} \int_{\Delta} \left(\int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y) \right) d(\Theta(s)ds) && \text{car } f^{-1}(\text{supp } \Theta) \cap \text{supp } \eta \text{ est} \\
&&& \text{compact donc recouvert par un} \\
&&& \text{nombre fini de } U_i. \\
&= - \sum_{i \in I} \int_{\Delta_i} \left(\int_{\{s\} \times V_i} g_i(y)(w \wedge \eta)(y) \right) d(\Theta(s)ds) && \text{car en dehors d'un } K_i \subset \Delta_i, \\
&&& \text{l'intégrale est nulle.}
\end{aligned}$$

Or Θ est à support compact et $g_i(x)(w \wedge \eta)(x)d(\Theta(s)ds)$ forme lisse sur X . Donc cette forme est intégrable sur $f^{-1}(\Delta_i) \cap U_i$. D'où par Fubini:

$$\begin{aligned}
T_{\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}}(\Theta) &= - \sum_{i \in I} \int_{\Delta_i \times V_i} g_i(y)w \wedge \eta \wedge d(\Theta \circ fdf) \\
&= - \int_X w \wedge \eta \wedge d(\Theta \circ fdf) \\
&= \int_X dw \wedge \eta \wedge (\Theta \circ fdf) + \int_X w \wedge d\eta \wedge (\Theta \circ fdf) - \int_X d(w \wedge \eta \wedge \Theta \circ fdf) \\
&= 0 + 0 - \int_X d(w \wedge \eta \wedge \Theta \circ fdf) \\
&\text{car } dw \wedge df = 0 \text{ donc } dw \wedge \eta \wedge (\Theta \circ fdf) = 0 \text{ et } d\eta = 0 \\
&= - \int_{\partial X} w \wedge \eta \wedge \Theta \circ fdf = 0 \\
&\text{par Stokes appliqué à } X \text{ (} \partial X = \emptyset \text{)}.
\end{aligned}$$

D'où $T_{\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}} = 0$. Dès lors, $\frac{\partial a}{\partial \bar{s}} = 0(pp)$ et comme $\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}$ est lisse, $\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}$ est nul partout.

Ainsi a est holomorphe.

2. Pour démontrer le deuxième point, on raisonne encore avec des distributions. Cette fois-ci, on considère $d'a = \frac{\partial a}{\partial s}(s)ds$ et on a (par le même calcul que le précédent):

$$\begin{aligned}
T_{\frac{\partial a}{\partial \bar{s}}}(\Theta) &= \int_{\Delta} \frac{\partial a}{\partial s} ds \wedge \Theta(s)d\bar{s} \\
&= - \int_{\Delta} a(d(\Theta d\bar{s})) \\
&= - \int_X w \wedge \eta \wedge d(\Theta \circ f d\bar{f}) \\
&= \int_X dw \wedge \eta \wedge (\Theta \circ f d\bar{f}) + \int_X w \wedge d\eta \wedge (\Theta \circ f d\bar{f}) - \int_X d(w \wedge \eta \wedge \Theta \circ f d\bar{f}) \\
&= \int_X dw \wedge \eta \wedge (\Theta \circ f d\bar{f}) \\
&\text{car } d\eta = 0 \text{ et par Stokes appliqué à } X \text{ (} \partial X = \emptyset \text{)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\frac{\partial a}{\partial s}}(\Theta) &= \int_X dw \wedge \eta \wedge (\Theta \circ f d\bar{f}) \\
&= \int_X df \wedge \alpha \wedge \eta \wedge (\Theta \circ f d\bar{f}) \\
&= \int_{f^{-1}(\Delta)} \alpha \wedge \eta \wedge (\Theta \circ f df \wedge d\bar{f}) \\
&= \int_{\{s \in \Delta\}} \int_{f=s} (\alpha \wedge \eta \wedge (\Theta(s) ds \wedge d\bar{s})) \\
&= \int_{\Delta} b(s) \Theta ds \wedge d\bar{s} \\
&\text{par Fubini avec } b(s) = \int_{f=s} \alpha \wedge \eta
\end{aligned}$$

Alors, $T_{\frac{\partial a}{\partial s}}(\Theta) = T_{b(s)}$ en tant que distribution. D'où $\frac{\partial a}{\partial s} = b(s)(pp)$ et comme les deux fonctions sont lisses, on a l'égalité partout.

□

On va maintenant donner les lemmes qui permettent de définir l'application entre HDR et le faisceau des germes de sections holomorphes de GM .

4.2 Commutation du passage à la cohomologie et de la limite inductive.

LEMME 4.2.1 *Soit la suite exacte de faisceaux:*

$$\Sigma : A \xrightarrow{d_1} B \xrightarrow{d_2} C$$

On pose $H(\Sigma) = \frac{\ker d_2}{\text{im } d_1}$ et $H(\Sigma)_x = \frac{(\ker d_2)_x}{(\text{im } d_1)_x}$. Alors

$$H(\Sigma)_x \cong \lim_{U \ni x} H(A(U) \rightarrow B(U) \rightarrow C(U))$$

Démonstration

On définit l'application linéaire:

$$\begin{aligned}
\psi : \lim_{U \ni x} H(A(U) \rightarrow B(U) \rightarrow C(U)) &\rightarrow H(\Sigma)_x \\
s \in B(U), d_2(s) = 0 &\mapsto (\overline{s_x})
\end{aligned}$$

- ψ est bien définie:

En effet, si $s = s' + d_1 t$ avec $s, s' \in B(U)$ et $t \in A(U)$, alors $s_x = s'_x + (d_1 t)_x = s'_x + d_1(t_x)$. D'où $\overline{s_x} = \overline{s'_x}$.

- ψ est surjective:

Soit $\overline{s_x} \in H(\Sigma)_x$ et $s_x \in (\ker d_2)_x$ un représentant de $\overline{s_x}$. Soit enfin $s \in (\ker d_2)(U)$ un représentant de s_x . On peut supposer $s \in (\ker d_2)(U)$ car $d(s_x) = 0$ implique que $(ds)_x = 0$ et donc, quitte à restreindre U , on peut supposer $s \in (\ker d_2)(U)$. Alors $\psi(\overline{s}) = \overline{s_x}$. D'où ψ est surjective.

– ψ est injective:

Soit $\bar{s} \in H(A(U), B(U), C(U))$ tel que $\overline{s_x} = 0$. Alors il existe $t_x \in B_x$ tel que $s_x = d_2(t_x)$. Alors il existe $V \subset U$ tel que $s|_V = d_2(t|_V)$. D'où $\overline{s|_V} = \bar{0}$ dans $H(A(V), B(V), C(V))$. Dès lors ψ est injective.

□

4.3 L'application $H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p)$ est une surjection pour tout $p \in \{0, \dots, n+1\}$.

Soit $p \in \{0, \dots, n+1\}$.

LEMME 4.3.1 *La suite exacte $(*)$ $0 \rightarrow df \wedge \Omega_X^{p-1} \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_{X/D}^p \rightarrow 0$ induit pour tout ouvert Δ de D^* une surjection de $H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p)$ dans $H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p)$*

Démonstration

- La suite de faisceau $0 \rightarrow df \wedge \Omega_X^{p-1} \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_{X/D}^p \rightarrow 0$ est exacte par définition du faisceau quotient $\Omega_{X/D}^p$.
- $f^{-1}(\Delta)$ est de Stein.
- $df \wedge \Omega_X^{p-1}$ faisceau cohérent.
En effet, Ω_X^p et Ω_X^{p-1} sont des faisceaux cohérents, $df \wedge \cdot$ est \mathcal{O} -linéaire et $df \wedge \Omega_X^{p-1} = \text{im}(df \wedge \cdot : \Omega_X^{p-1} \rightarrow \Omega_X^p)$.

La suite exacte $(*)$ induit une suite exacte longue de cohomologie:

$$\dots \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p) \rightarrow H^1(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega_{X/D}^{p-1}) \rightarrow \dots$$

D'où la surjection par le deuxième et le troisième point ($H^1(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^{p-1}) = 0$).

□

4.4 w $d_{X/D}$ -fermée implique que $dw = df \wedge \alpha$ globalement.

LEMME 4.4.1 *Soit $p \geq 0$. Soit Δ un disque de D^* et $w \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p)$, $d_{X/D}$ -fermée. Alors il existe $\beta \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p)$ tel que $dw = df \wedge \beta$.*

La condition $d_{X/D}$ -fermée permet d'avoir l'existence de sections β sur des ouverts de $f^{-1}(\Delta)$ tel que $dw = df \wedge \beta$. Mais on veut définir β globalement sur $f^{-1}(\Delta)$. Pour démontrer ce lemme, on va introduire le lemme suivant:

LEMME 4.4.2 *La suite de faisceaux*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^1 \xrightarrow{df \wedge \cdot} \dots \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^n \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^{n+1} \longrightarrow 0$$

est exacte sur $X - \{0\}$.

On peut démontrer que c'est une suite exacte de faisceaux sur X sans la dernière flèche mais on a besoin, dans cette démonstration, d'avoir le résultat seulement sur $X - \{0\}$.

Démonstration

Soit $x \in X - \{0\}$. f est une submersion en x donc il existe Δ_x voisinage ouvert de x dans $X - \{0\}$ tel que $f|_{\Delta_x}$ soit la projection de la première coordonnée dans un système convenable.

- Soit alors $\alpha \in \Omega_X^p$, $\alpha = \sum \alpha_I dz_I$ tel que $\alpha \in \ker(df \wedge \cdot)$. Alors $df \wedge \alpha = dz_0 \wedge \sum \alpha_I dz_I = 0$. Dès lors $\alpha = dz_0 \wedge \sum_{I \ni \{0\}} \pm \alpha_I dz_{I - \{0\}} = df \wedge \beta$ car on a $\alpha_I = 0$ si $0 \notin I$. Donc $\ker(df \wedge \cdot) \subset \text{im}(df \wedge \cdot)$.
- Inversement, soit $\beta \in \Omega_X^p$, $\beta = \sum \alpha_J dz_J$. Alors $df \wedge df \wedge \beta = 0$. Donc $\text{im}(df \wedge \cdot) \subset \ker(df \wedge \cdot)$.

On a ainsi la suite exacte $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_X^{n+1}$. De plus, $\mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^1$ correspond à l'application qui à la fonction holomorphe g associe gdz_0 . Cette application est injective. d'où:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^1 \xrightarrow{df \wedge \cdot} \dots \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^{n+1}$$

est exacte. De plus, on sait que $df \wedge \Omega_X^n = \Omega_X^{n+1}$ sur $X \setminus \{0\}$. Donc on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^1 \xrightarrow{df \wedge \cdot} \dots \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^{n+1} \longrightarrow 0$$

□

REMARQUE 4.4.3 Ce lemme permet d'avoir les suites exactes de faisceaux sur $X \setminus \{0\}$ suivante:

$$0 \longrightarrow \frac{\Omega_X^{p-1}}{df \wedge \Omega_X^{p-2}} \xrightarrow{df \wedge \cdot} \Omega_X^p \xrightarrow{df \wedge \cdot} df \wedge \Omega_X^p \longrightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/D}^1 \rightarrow df \wedge \Omega_{X/D}^1 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow df \wedge \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Démonstration du lemme 4.4.1:

La première suite exacte de faisceaux sur $X \setminus \{0\}$ induit pour tout ouvert Δ de D^* une suite exacte longue de cohomologie:

$$\dots \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega_X^p) \rightarrow H^1\left(f^{-1}(\Delta), \frac{\Omega_X^{p-1}}{df \wedge \Omega_X^{p-2}}\right) \rightarrow \dots$$

Or $f^{-1}(\Delta)$ est de Stein et $\frac{\Omega_X^{p-1}}{df \wedge \Omega_X^{p-2}}$ est un faisceau cohérent. Ainsi l'application:

$$(df \wedge \cdot)_* : H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega_X^p)$$

est surjective.

De plus, la condition $d_{X/D}$ -fermée veut dire que la n -forme s'écrit localement $df \wedge \beta$ donc peut être vu comme une section de $f^{-1}(\Delta)$ dans $df \wedge \Omega_X^p$. La surjectivité de $(df \wedge \cdot)_*$ permet de définir β globalement.

□

4.5 La suite $HDR \rightarrow HDR \rightarrow i_*(H^n(X(s_0), \mathbb{C})) \rightarrow 0$ est exacte.

PROPOSITION 4.5.1 *On a la suite exacte de faisceaux sur D^* suivante:*

$$HDR \xrightarrow{s-s_0} HDR \xrightarrow{\Psi_{s_0}} i_*(H^n(X(s_0), \mathbb{C})) \longrightarrow 0$$

où $(s - s_0)$ correspond à la multiplication par $(s - s_0)$, ψ_{s_0} correspond à la restriction à $X(s_0)$ et $i : \{s_0\} \rightarrow D^*$.

Avant de démontrer ce lemme, on va établir les résultats suivants:

LEMME 4.5.2

$$0 \longrightarrow (\Omega_{X/D}) \xrightarrow{(f-s_0)} (\Omega_{X/D}) \xrightarrow{\psi_{s_0}} j_*(\Omega_{X(s_0)}) \longrightarrow 0$$

$$\bar{w} \longrightarrow \overline{(f-s_0)w} \quad ; \quad \bar{\alpha} \longrightarrow \alpha|_{X(s_0)}$$

avec $j : X(s_0) \rightarrow X$ est une suite exacte de complexes de faisceaux sur $X \setminus f^{-1}(0)$.

Démonstration

1. Montrons tout d'abord que la suite de faisceaux est exacte à p fixé.

(a) Montrons que ψ_{s_0} est bien définie:

Soit $\bar{\alpha} = \overline{\alpha'} \in (\Omega_{X/D}^p)(U)$. Alors quitte à rétrécir U , $\alpha = \alpha' + df \wedge \beta$ avec $\beta \in (\Omega_X^{p-1})(U)$. D'où $\alpha|_{X(s_0)} = \alpha'|_{X(s_0)}$ car $f = s_0$ implique $df|_{X(s_0)} = 0$.

(b) - La multiplication par $(f - s_0)$ est injective. En effet, sur $(\Omega_{X/D})_x$ avec $x \notin f^{-1}(s_0)$ cette multiplication est injective. Si maintenant on considère $w \in (\Omega_{X/D})_x$ avec $x \in f^{-1}(s_0)$ et $(f - s_0)w = df \wedge \alpha$ alors $w = df \wedge \frac{\alpha}{(f-s_0)}$ et comme w est une forme holomorphe et que localement, quitte à changer de système de coordonnées, $f = z_0$, $\frac{\alpha}{(f-s_0)}$ est également une forme holomorphe. Ainsi, la multiplication par $(f - s_0)$ est injective.

- Soit $\bar{w} \in \Omega_{X/D}^p(U)$. Alors, $\psi_{s_0}(\overline{(f-s_0)w}) = ((f-s_0)w)|_{X(s_0)} = 0$. Ainsi $\text{im}(f-s_0) \subset \ker \psi_{s_0}$.

- Soit $\bar{w} \in \ker \psi_{s_0}(U)$ i.e. $w|_{X(s_0)} = 0$. Alors $w = (f-s_0)\alpha + df \wedge \beta$ localement. Dès lors, $\bar{w} = \overline{(f-s_0)\alpha}$ localement. Ainsi $\ker \psi_{s_0} \subset \text{im}(f-s_0)$.

- La surjectivité de ψ_{s_0} est évidente. En effet, si on considère $\eta \in \Omega_{X(s_0),x}^p$, il est indépendant de z_0 dans un système de coordonnées où f coïncide avec la projection sur le premier facteur. Ainsi, ce germe peut être vu comme un élément de $\Omega_{X,x}^p$.

On a donc bien une suite exacte de faisceaux sur D^* .

2. Montrons maintenant qu'il s'agit d'une suite exacte de complexes.

Il faut montrer que $(f - s_0) \circ d_{X/D}(\bar{w}) = d_{X/D} \circ (f - s_0)(\bar{w})$
 et $\psi_{s_0} \circ d_{X/D}(\bar{w}) = d \circ \psi_{s_0}(\bar{w})$

- Soit $\bar{w} \in (\Omega_{X/D}^p)_x$ représenté par $w \in \Omega_X^p(U)$. Alors, on a:

$$\begin{aligned} (f - s_0) \circ d_{X/D}(\bar{w}) &= ((f - s_0) \circ d_{X/D}(\bar{w})) \\ &= \overline{(f - s_0)(dw)} \\ &= \overline{d((f - s_0)w) - d(f - s_0) \wedge w} \\ &= d_{X/D} \circ (f - s_0)\bar{w} \end{aligned}$$

car $d(f - s_0) \wedge w = df \wedge w$.

On a ainsi l'égalité sur les germes.

- L'autre égalité peut se démontrer en utilisant les sections du faisceau directement. Soit $\bar{w} \in \Omega_{X/D}^p(U)$. Alors il existe w représentant de \bar{w} dans $\Omega_X^p(U)$ et sur U , on a:

$$\psi_{s_0} \circ d_{X/D}(\bar{w}) = \psi_{s_0}(\overline{dw}) = (dw)|_{X(s_0)} = d(w|_{X(s_0)}) = d \circ \psi_{s_0}(\bar{w})$$

On a ainsi une suite exacte de complexe.

□

COROLLAIRE 4.5.3

$$\Omega_{X(s_0)}^p \cong \frac{(\Omega_X^p)|_{X(s_0)}}{(df \wedge (\Omega_X^{p-1})|_{X(s_0)} + (f - s_0)(\Omega_X^p)|_{X(s_0)})}$$

Démonstration

Il s'agit d'une définition de $\Omega_{X(s_0)}^p$. Néanmoins, on peut donner une démonstration de cette isomorphisme à partir du lemme précédent. On a $\frac{\Omega_{X/D}^p}{(f - s_0)\Omega_{X/D}^p} \cong$

$$\frac{\Omega_X^p}{df \wedge \Omega_X^{p-1} + (f - s_0)\Omega_X^p}.$$

Or d'après le lemme 4.5.2, on a: $\Omega_{X(s_0)}^p \cong \frac{(\Omega_{X/D}^p)|_{X(s_0)}}{(f - s_0)\Omega_{X/D}^p|_{X(s_0)}}$. D'où:

$$\Omega_{X(s_0)}^p \cong \frac{(\Omega_X^p)|_{X(s_0)}}{(df \wedge (\Omega_X^{p-1})|_{X(s_0)} + (f - s_0)(\Omega_X^p)|_{X(s_0)})}$$

□

Dans ce qui suit, Δ est un disque de D^* .

LEMME 4.5.4 $H^0(f^{-1}(\Delta), \cdot)$ est un foncteur exact sur les suites de faisceaux dont le premier est cohérent et Δ de Stein.

Démonstration

Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux avec \mathcal{F}_1 faisceau cohérent. Pour tout ouvert de la base X , on a la suite exacte longue de

cohomologie: $0 \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_1) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_2) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_3) \rightarrow H^1(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_1) \rightarrow \dots$. Or Δ de Stein et f est une submersion holomorphe entre deux variétés de Stein donc $f^{-1}(\Delta)$ est de Stein. De plus, \mathcal{F}_1 cohérent, donc $H^1(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_1) = 0$ et on a alors la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_1) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_2) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \mathcal{F}_3) \rightarrow 0$$

□

REMARQUE 4.5.5 D'après les lemmes 4.5.2 et 4.5.4, on a la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), j_*(\Omega_{X(s_0)}^p)) \rightarrow 0$$

et si $s_0 \in \Delta$, on a $H^0(f^{-1}(\Delta), j_*(\Omega_{X(s_0)}^p)) = H^0(X(s_0), \Omega_{X(s_0)}^p) = \Omega^p(X(s_0))$. Alors la suite exacte s'écrit:

$$0 \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p) \rightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^p) \rightarrow \Omega^p(X(s_0)) \rightarrow 0$$

LEMME 4.5.6 $H^0(\Delta, HDR) \cong H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$. Ainsi, $(HDR)_{s_0}$ est isomorphe à la limite inductive sur Δ de $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$.

Démonstration

1. On va tout d'abord montrer que $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) = H^n(f^{-1}(\Delta), f^{-1}(\mathcal{O}_D))$. Pour cela, on va utiliser le théorème suivant:

THEOREME 4.5.7 (Théorème de De Rham abstrait) Soit une résolution acyclique du faisceau \mathcal{S} :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{t^0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{t^1} \dots$$

Alors pour tout $p \geq 1$, $\check{H}^p(X, \mathcal{S}) \cong \frac{\ker t_*^p}{\text{im } t_*^{p-1}}$ et $\check{H}^0(X, \mathcal{S}) \cong \ker t_*^0$, où

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{S}, X) \xrightarrow{i_*} \Gamma(\mathcal{F}^0, X) \xrightarrow{t_*^0} \Gamma(\mathcal{F}^1, X) \xrightarrow{t_*^1} \dots$$

Or $f^{-1}(\Delta)$ est de Stein et $\Omega_{X/D}$ est un faisceau de \mathcal{O}_X -module cohérent. Dès lors, la suite exacte donnée par le lemme 3.3.7:

$$0 \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \Omega_{X/D}^0 \rightarrow \Omega_{X/D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_{X/D}^{n+1} \rightarrow 0$$

est une résolution sur $f^{-1}(\mathcal{O}_D)$. On en conclut alors que $H^n(f^{-1}(\Delta), f^{-1}(\mathcal{O}_D))$ est isomorphe à $H^n(H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}))$. De plus, comme $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) = H^n(H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}))$, on a l'égalité voulue.

2. Maintenant, montrons que $H^n(f^{-1}(\Delta), f^{-1}(\mathcal{O}_D)) = H^0(\Delta, HDR)$. On va pour cela utiliser le théorème suivant:

THEOREME 4.5.8 Soit $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ une résolution f_* -acyclique (i.e. $R^q f_* \mathcal{I}^k = 0$ pour tout $q > 0$ et $k \geq 0$). Alors $R^p f_*(\mathcal{F}) = H^p(f_* \mathcal{I})$ et $(R^p f_*(\mathcal{F}))_x = \lim_{V \ni x} H^p(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}))$.

Dans notre cas, on a la résolution f_* -acyclique de $f^{-1}(\mathcal{O}_D)$:

$$0 \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_D) \rightarrow \Omega_{X/D}$$

On en déduit donc que $R^q f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_D)) = H^p(f_* \Omega_{X/D}) = H^p DR$. De plus:

$$\begin{aligned} H^n(f^{-1}(\Delta), f^{-1}(\mathcal{O}_D)) &= R^n(\Gamma(f^{-1}(\Delta), \cdot))(f^{-1}(\mathcal{O}_D)) \\ &= R^n(\Gamma(\Delta, \cdot) \circ f_*)(f^{-1}(\mathcal{O}_D)) \\ &\quad \uparrow \\ E^{p,q} &= R^p(\Gamma(\Delta, R^q f_*(f^{-1}(\mathcal{O}_D)))) \end{aligned}$$

Et comme, d'après Brieskorn, les $H^q DR$ sont cohérents pour tout $q \geq 0$, on a $E^{p,q} = 0$ pour tout $q \geq 0$ et tout $p > 0$. Il ne reste donc que le terme $E^{0,n} = H^0(\Delta, HDR)$. D'où par les suites spectrales de foncteurs composées:

$$H^n(f^{-1}(\Delta), f^{-1}(\mathcal{O}_X)) = H^0(\Delta, HDR)$$

Dès lors, on a l'égalité: $H^0(\Delta, HDR) \cong H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$.

□

Démonstration

On va démontrer la proposition 4.5.1. On a déjà immédiatement les suites exactes aux germes $s \neq s_0$ car alors $(s - s_0)$ est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que

$$0 \rightarrow HDR_{s_0} \rightarrow HDR_{s_0} \rightarrow \check{H}^n(X(s_0), \mathbb{C}) \rightarrow 0$$

est exacte. Or on sait d'après la remarque 4.5.5, qu'on a la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(\Delta, DR_{X/D}) \rightarrow H^0(\Delta, DR_{X/D}) \rightarrow \Omega(X(s_0)) \rightarrow 0$$

On a alors la suite exacte longue de cohomologie:

$$H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) \rightarrow H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) \rightarrow H^n(\Omega^n(X(s_0))) \rightarrow H^{n+1}(H^0(\Delta, DR_{X/D})) \rightarrow \dots$$

Or $H^{n+1}(H^0(\Delta, DR_{X/D})) = 0$ car $DR_{X/D}^{n+1} = 0$ en dehors de 0. D'où:

$$H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) \rightarrow H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D})) \rightarrow H^n(\Omega^n(X(s_0))) \rightarrow 0$$

En passant à la limite inductive et en utilisant le lemme 4.5.6 et le théorème de De Rham, on obtient:

$$HDR_{s_0} \rightarrow HDR_{s_0} \rightarrow \check{H}^n(X(s_0), \mathbb{C}) \rightarrow 0$$

□

REMARQUE 4.5.9 Cette dernière suite exacte donne l'isomorphisme:

$$\check{H}^n(X(s_0), \mathbb{C}) \cong \frac{HDR_{s_0}}{(s - s_0)HDR_{s_0}}$$

4.6 Démonstration de l'isomorphisme entre les sections holomorphes de GM et la restriction de HDR à D^* .

Maintenant, on va démontrer le théorème principale de ce paragraphe(4.1.1).
Démonstration

1. Définition de la section ensembliste de GM image de l'application

$$\psi : HDR|_{D^*} \rightarrow \underline{GM}$$

On considère $\bar{w} \in HDR(\Delta)$ avec $\Delta \subset D^*$. D'après le lemme 4.5.6 $HDR(\Delta) = H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$. On peut donc voir \bar{w} dans $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$. Soit alors $\tilde{w} \in H^0(\Delta, DR_{X/D}^n)$ tel que $d_{X/D}(\tilde{w}) = 0$. Il s'agit d'un représentant de \bar{w} dans le quotient $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}^n))$. Et enfin, on note $w \in H^0(\Delta, f_*(\Omega_X^n))$ donnée par la surjection du lemme 4.3.1. On pose alors:

$$\psi(\bar{w})(s_0) = [w|_{X(s_0)}] \text{ pour tout } s_0 \in \Delta$$

On remarque que $\psi(\bar{w})(s_0) = \Psi_{s_0}(\bar{w})$. On obtient ainsi une section ensembliste de GM . Il faudra montrer qu'elle est holomorphe. Mais montrons tout d'abord que ψ est bien définie. Il faut voir que ψ ne dépend pas du représentant w choisie pour \bar{w} . Soit deux représentants w et w' . Alors $\tilde{w} = \tilde{w}' + d_{X/D}(\alpha) = \tilde{w}' + \tilde{d}(\alpha)$. D'où $w = w' + d\alpha + df \wedge \beta$ (lemme 4.4.1) et on a ainsi $[w|_{X(s_0)}] = [w'|_{X(s_0)}]$ car $(df \wedge \beta)|_{X(s_0)} = 0$ et $[d\alpha|_{X(s_0)}] = 0$. Donc ψ est bien définie.

2. Montrons que la section ensembliste de GM est bien holomorphe. On va utiliser le lemme 4.1.2. On note $\gamma_s = [w|_{X(s)}]$ avec $s \in \Delta$. On a

$$\gamma_s = \sum_{j=1}^{\mu} a_j(s) C_s^j$$

où $(C_s^j)_{j=1 \dots \mu}$ famille localement constante et on est donc ramené à montrer que les coefficients a_j sont holomorphes. Pour cela, on va écrire les coefficients a_j sous la forme intégrale du lemme 4.1.2. Pour le faire, on fixe le diagramme suivant donnant la C^∞ -trivialité de $f : f^{-1}(\Delta) \rightarrow \Delta$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & \Delta \times f^{-1}(0) \\ & \searrow f & \swarrow p_1 \\ & \Delta & \end{array}$$

Ceci peut toujours se faire quitte à réduire Δ car la propriété d'être holomorphe est une propriété locale. On prend $C_{s_0}^1, \dots, C_{s_0}^\mu$ une base de $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$ et C^1, \dots, C^μ les collections de classes localement constantes associées. Par dualité de Poincaré, on a $H_c^n(X(s_0), \mathbb{C}) \cong H^n(X(s_0), \mathbb{C})^*$. Soit alors $\eta_{s_0}^1, \dots, \eta_{s_0}^\mu \in H_c^n(X(s_0), \mathbb{C})$ la base duale de $C_{s_0}^1, \dots, C_{s_0}^\mu$. Les

$\eta_{s_0}^j$ sont représentés par des n-formes lisses à support compact, d-fermées. On regarde les formes $\phi^*(\eta_{s_0}^j)$ qui elles sont à support f -propre et d-fermées.

- d-fermée car $d(\phi^*(\eta_{s_0}^j)) = \phi^*(d\eta_{s_0}^j) = \phi^*(0) = 0$.
- Soit $W = \text{supp } \phi^*(\eta_{s_0}^j)$ fermé et $K \subset \Delta$ un compact. Alors $\phi(W \cap f^{-1}(K))$ est un fermé dans $K \times \text{supp } \phi^*(\eta_{s_0}^j)$ qui est compact. Il est donc lui même compact et comme ϕ est un difféomorphisme, $W \cap f^{-1}(K)$ est compact.

On a alors $\eta_s^j = \phi^*(\eta_{s_0}^j)|_{X(s)}$ à support compact.

Il faut maintenant montrer que $(\eta_s^j)_{j=1, \dots, \mu}$ est la base duale de $(C_s^j)_{j=1, \dots, \mu}$ c'est à dire, il reste à calculer $\int_{X(s)} C_s^j \wedge \eta_s^k$ et à voir que le résultat ne dépend pas de s . Or, on a :

$$\begin{aligned} \int_{X(s)} C_s^j \wedge \eta_s^k - \int_{X(s_0)} C_{s_0}^j \wedge \eta_{s_0}^k &= \int_{X(s)} (C^j \wedge \eta^k)|_{X(s)} - \int_{X(s_0)} (C^j \wedge \eta^k)|_{X(s_0)} \\ &= \int_{X(s)} C^j \wedge \eta^k - \int_{X(s_0)} C^j \wedge \eta^k \\ &= \int_{X(s) - X(s_0)} C^j \wedge \eta^k \end{aligned}$$

Comme $X(s) - X(s_0)$ est le bord orienté de $f^{-1}([s_0, s])$ dans $f^{-1}(\Delta)$, on obtient par le théorème de Stokes :

$$\int_{X(s) - X(s_0)} C^j \wedge \eta^k = \int_{f^{-1}([s_0, s])} d(C^j \wedge \eta^k) = 0$$

car C^j et η^k sont fermés.

Ainsi, l'intégrale ne dépend pas de s et comme $(\eta_{s_0}^j)$ est la base duale de $(C_{s_0}^j)$, on a (η_s^j) est la base duale de (C_s^j) .

On en déduit alors que les coordonnées de $w|_{X(s)}$ dans la base $(C_s^j)_j$ sont données par :

$$a_j(s) = \int_{X(s)} w \wedge \eta_s^j = \int_{f=s} w \wedge \eta_s^j$$

En effet, $\int_{X(s)} w \wedge \eta_s^j = \sum_{k=1}^{\mu} a_k(s) \int_{X(s)} C_s^k \wedge \eta_s^j = a_j(s)$.

On va maintenant appliquer le lemme 4.1.2 :

- η_s^j est une n-forme lisse à support propre, d-fermée.
- w est une n-forme holomorphe sur $f^{-1}(\Delta)$ $d_{X/D}$ -fermée. Donc d'après le lemme 4.4.2, il existe β une n-forme holomorphe sur $f^{-1}(\Delta)$ tel que $dw = df \wedge \beta$.

Dès lors, d'après le lemme 4.1.2, a_j est holomorphe ce qui termine la définition de l'application ψ .

Il faut encore montrer qu'elle est bijective.

3. Montrons que ψ est surjective. On sait par la proposition 2.3.3 que \underline{GM}_{s_0} est libre et engendrée par les germes de classes de cohomologie localement constantes. On considère alors $\{C^j\}_{j=1, \dots, \mu}$ une telle base. Or, d'après la proposition 4.5.1, les $\{C_{s_0}^j\}$ proviennent d'un w_j par ψ_{s_0} . On pose alors

$\gamma_j(s) = \psi(w_j) = \sum_k a_{jk}(s)C_s^k$. On obtient ainsi une matrice A holomorphe et inversible car $A(s_0) = Id$. On appelle B sa matrice inverse. On a alors:

$$\psi\left(\sum_k b_{jk} w_j\right) = \sum_k b_{jk}(s)w_j|_{X(s)} = \sum_k b_{jk}(s)\gamma_j = C_j$$

Ainsi, ψ est surjective.

4. Montrons que ψ est injective.

Soit $\bar{w}_{s_0} \in HDR_{s_0}$ tel que $\psi(\bar{w}_{s_0}) = 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert Δ de s_0 et \bar{w} représentant du germe \bar{w}_{s_0} dans $HDR(\Delta)$ tel que $\psi(\bar{w}) = 0$. D'où pour tout $s \in \Delta$, $[w|_{X(s)}] = 0$. En particulier, $[w|_{X(s_0)}] = 0 \in H^n(X(s_0), \mathbb{C})$. Or d'après la proposition 4.5.1, on a la suite exacte:

$$HDR_{s_0} \xrightarrow{(s-s_0)} HDR_{s_0} \xrightarrow{\psi} H^n(X(s_0), \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

D'où $\bar{w} \in im(s-s_0)$, i.e. $\bar{w} = \overline{(f-s_0)w'}$ sur $\Delta' \subset \Delta$ voisinage de s_0 . Or pour tout $s_1 \in \Delta'$, $s_1 \neq s_0$, on a $[w|_{X(s_1)}] = 0$. D'où $[(f-s_0)w'|_{X(s_1)}] = 0$. Dès lors, $[w'|_{X(s_1)}] = 0$ car $s_1 - s_0$ est inversible.

On regarde alors $\gamma : s \rightarrow [w|_{X(s)}]$ section sur Δ' du faisceau \underline{GM} . Ce faisceau est localement libre (c.f. proposition 2.3.3). Ainsi, au voisinage de s_0 , il existe une famille de classes de cohomologie localement constantes $\{C^j\}_{j=1, \dots, \mu}$ tel que dans ce même voisinage, $\gamma(s) = \sum a_j(s)C_s^j$. Comme $\gamma(s)$ est nulle sauf peut-être en s_0 , on en conclut que les a_j sont nulles pour tout $s \neq s_0$ et comme il s'agit de fonctions holomorphes, elles sont nulles partout. Dès lors, $[w'|_{X(s_0)}] = 0$.

On recommence... On a alors l'existence de $w^{(n)} \in HDR(\Delta^{(n)})$ tel que $\bar{w} = \overline{(f-s_0)^n w^{(n)}}$. D'où

$$\bar{w}_{s_0} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((s-s_0)^n HDR)_{s_0}$$

Or $\mathbb{C}\{s\}$ est principal donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((s-s_0)^n HDR)_{s_0} = 0$$

D'où $\bar{w}_{s_0} = 0$. On a ainsi ψ injective.

□

Chapitre 5

Régularité de la connexion de Gauss Manin.

Le but de ce chapitre est de démontrer la régularité de la connexion de Gauss Manin. On définira tout d'abord une connexion sur le faisceau $HDR|_{D^*}$. On introduira ensuite deux $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules $'H$ et $''H$ qui vont permettre de démontrer l'assertion du théorème de Milnor sur la dimension des espaces $H^p(X(t), \mathbb{C})$. On les utilisera également dans le prochain chapitre. Ensuite on reviendra à la démonstration de la régularité en démontrant dans un premier temps l'isomorphisme de connexions entre $(HDR|_{D^*}, \tilde{\nabla})$ et (\underline{GM}, ∇) et dans un deuxième temps les théorèmes de Phragmen-Lindelöf qui permettront de conclure sur le théorème de régularité de $\tilde{\nabla}$ selon la démonstration proposée dans [2] par B. Malgrange.

5.1 Préliminaires.

Nous allons tout d'abord donner des théorèmes utiles dans les paragraphes suivants. Leurs démonstrations sont données par E. Brieskorn dans [1] et par M. Sebastiani dans [5].

THEOREME 5.1.1 (Théorème 1 de Brieskorn) 1. HDR est \mathcal{O}_D -cohérent y compris en 0.

2. $\frac{HDR}{\text{torsion}(HDR)} \cong \mathcal{O}_D^\mu$, c'est-à-dire $\frac{HDR}{\text{torsion}(HDR)}$ est un faisceau libre de rang μ avec $\text{torsion}(HDR) = \{\alpha \in HDR / \exists a \in HDR, a \neq 0 \text{ tel que } a\alpha = 0\}$.

On a également:

THEOREME 5.1.2 (Théorème de Sebastiani) $\text{torsion}(HDR) = 0$

Par conséquent, HDR est un faisceau libre de \mathcal{O}_D de rang μ . On pourra ainsi considérer une base de sections globales sur HDR . On a enfin:

THEOREME 5.1.3 (Théorème 2 de Brieskorn)

$$HDR_0 = H^n(\Omega_{X/D,0})$$

Ce théorème permet de voir les germes de HDR en 0 comme élément de $\frac{Z^n(\Omega_{X/D})}{d\Omega_{X/D}^{n-1}}$ qui est plus facile à utiliser. On voit ainsi un élément défini au voisinage de la fibre $f^{-1}(0)$ comme un élément défini au voisinage du point $\underline{0}$. Dans la suite, on considèrera $w \in HDR_0$ et $\tilde{w} \in Z^n(\Omega_{X/D,0})$ un représentant de w .

5.2 Construction d'une connexion sur le faisceau HDR .

Dans ce paragraphe, on va construire une connexion holomorphe $\tilde{\nabla}$ sur $HDR|_{D^*}$ puis on la prolongera en une connexion méromorphe sur HDR tout entier.

1. Construction de $\tilde{\nabla}$ sur $HDR|_{D^*}$:

Pour commencer, on rappelle que d'après le lemme 4.4.1, pour tout $w \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$ $d_{X/D}$ -fermé, il existe un $\alpha \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$ tel que $dw = df \wedge \alpha$. On considère alors $\bar{w} \in HDR(\Delta)$ représentant d'un élément de HDR_{s_0} . Par le lemme 4.5.6, on peut le voir comme un élément de $H^n(H^0(\Delta, DR_{X/D}))$. On considère alors $w \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^n)$ $d_{X/D}$ -fermé. Par le lemme 4.3.1, on lui associe $\tilde{w} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$. D'après le lemme 4.4.1, il existe alors un $\tilde{\alpha} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$ tel que $d\tilde{w} = df \wedge \tilde{\alpha}$. On pose alors:

$$\tilde{\nabla}(\bar{w}_{s_0}) = \bar{\alpha}_{s_0}$$

où α est l'image de $\tilde{\alpha}$ dans $\Omega_{X/D}^n$. On notera souvent cet élément $\frac{dw}{df}$. On verra dans la démonstration du théorème 5.3.5 sur la dimension des espaces $H^p(X(t), \mathbb{C})$, une autre façon de définir $\tilde{\nabla}$ de façon algébrique.

2. Montrons que $\tilde{\nabla}$ est bien définie.

Soit $\tilde{w}' = \tilde{w} + df \wedge \tilde{\beta} + d\tilde{\gamma} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$. Alors,

$$\begin{aligned} d\tilde{w}' &= d\tilde{w} - df \wedge d\tilde{\beta} \\ &= df \wedge \tilde{\alpha} - df \wedge d\tilde{\beta} \\ &= df \wedge (\tilde{\alpha} - d\tilde{\beta}) \end{aligned}$$

Et ainsi, $\tilde{\nabla}(\overline{w'}) = \overline{\alpha - d\tilde{\beta}} = \bar{\alpha} = \tilde{\nabla}(\bar{w})$. Dès lors, $\tilde{\nabla}$ est une application de faisceaux bien définie.

3. Montrons que $\tilde{\nabla}$ est une connexion.

- $\tilde{\nabla}$ est \mathbb{C} -linéaire.
Soit $w = aw' + bw''$. Alors,

$$\tilde{\nabla}(\overline{aw' + bw''}) = \overline{a\alpha' + b\alpha''} = a\bar{\alpha}' + b\bar{\alpha}'' = a\tilde{\nabla}(\bar{w}') + b\tilde{\nabla}(\bar{w}'')$$

Ainsi, $\tilde{\nabla}$ est \mathbb{C} -linéaire.

- Démontrons qu'elle vérifie l'identité de Leibniz.

Soit $k \in \mathcal{O}_D(\Delta)$ et $w \in HDR(\Delta)$. On considère alors $\tilde{w} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$

et $\tilde{\alpha} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$ définis dans la construction de $\tilde{\nabla}$ et on a

$$\begin{aligned} d(k.\tilde{w}) &= d((k \circ f)\tilde{w}) \\ &= (k \circ f)d\tilde{w} + (k' \circ f)df \wedge \tilde{w} \quad \text{où } k' = \frac{dk}{ds} \\ &= (k \circ f)df \wedge \tilde{\alpha} + (k' \circ f)df \wedge \tilde{w} \\ &= df \wedge [(k \circ f)\tilde{\alpha} + (k' \circ f)\tilde{w}] \end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(k.\bar{w}) &= \overline{(k \circ f)\alpha + (k' \circ f)w} \\ &= \overline{(k \circ f)\alpha} + \overline{(k' \circ f)w} \\ &= k.\bar{\alpha} + k'.\bar{w} \\ &= \frac{dk}{ds}.\bar{w} + k.\tilde{\nabla}(\bar{w}) \end{aligned}$$

On a ainsi, $\tilde{\nabla}$ vérifie l'identité de Leibniz. Dès lors, $\tilde{\nabla}$ est une connexion holomorphe de $HDR|_{D^*}$.

Or, on sait qu'une connexion holomorphe sur $HDR|_{D^*}$ se prolonge en une connexion méromorphe régulière (Théorème de prolongement en dimension 1). L'objectif sera de munir HDR d'une connexion méromorphe $\tilde{\nabla}$ naturelle et de montrer qu'elle est régulière. On donne tout d'abord la proposition:

PROPOSITION 5.2.1 *Il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \Omega_{X/D}^n \subset Z(\Omega_{X/D}^n)$ et $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$.*

Démonstration

On sait que $df \wedge \Omega_X^n = J(f)\Omega_X^{n+1} \subset \Omega_X^{n+1}$ avec égalité sauf en 0. Dans un premier temps, on veut montrer qu'il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$. Si on montre qu'il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \in J(f)$, on aura le résultat. Posons $I = (f)$. On a $Z(I) = \{f = 0\}$ et $Z(J(f)) = \{0\}$. D'où $I(Z(I)) \subset I(Z(J(f)))$. Et par le théorème de nullstellensatz analytique, on a: $r(I) \subset r(J(f))$. Or $f \in r(I)$ donc il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \in J(f)$.

Soit maintenant $w \in (\Omega_{X/D}^n)(f^{-1}(\Delta))$ et $\tilde{w} \in \Omega_X^n(f^{-1}(\Delta))$ un représentant. On a: $d(f^l \tilde{w}) = lf^{l-1}df \wedge \tilde{w} + f^l d\tilde{w}$ et comme $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$, on a: il existe $\tilde{\alpha} \in \Omega_X^n(f^{-1}(\Delta'))$ tel que $f^l d\tilde{w} = df \wedge \tilde{\alpha}$. Ainsi, $d(f^l \tilde{w}) = df \wedge (lf^{l-1}\tilde{w} + \tilde{\alpha})$. Dès lors, $d_{X/D}(f^l w) = \overline{d(f^l \tilde{w})} = 0$, i.e. $f^l w \in Z^n(\Omega_{X/D}^n, d_{X/D})$.

□

COROLLAIRE 5.2.2 $\tilde{\nabla}$ se prolonge en une connexion méromorphe en 0 sur HDR tout entier d'ordre au plus l où $\tilde{\nabla}$ est définie comme suit: on considère \bar{w}_0 dans HDR_0 et \tilde{w} représentant dans $Z^n(\Omega_{X/D,0}^n)$. Alors en raisonnant comme

en 4.4 mais avec la suite exacte $0 \longrightarrow \Omega_{X,0}^1 \xrightarrow{df \wedge} \dots \xrightarrow{df \wedge} \Omega_{X,0}^{n+1}$ (voir [6]), on définit un $\tilde{\alpha}$ tel que $d\tilde{w} = df \wedge \tilde{\alpha}$. Le problème ici est que l'image α de $\tilde{\alpha}$ dans $\Omega_{X/D,0}^n$ n'est pas nécessairement fermé car $\Omega_{X/D,0}^{n+1}$ est concentré en 0. Mais d'après la proposition précédente, $f^l \alpha \in Z^n(\Omega_{X/D,0}^n)$ et on pose alors:

$$\tilde{\nabla}(\bar{w}_0) = \frac{1}{s^l} \otimes s^l \bar{\alpha}$$

REMARQUE 5.2.3 Si on pose $\tilde{\nabla} : \begin{array}{ccc} HDR & \rightarrow & \frac{\Omega_{X/D}^n}{d\Omega_{X/D}^{n-1}} \\ \bar{w} & \mapsto & \bar{\alpha} \end{array}$, on dit que l'on a une $(HDR, \frac{\Omega_{X/D}^n}{d\Omega_{X/D}^{n-1}})$ -connexion.

5.3 Les $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules $'H$ et $''H$.

Maintenant, on va définir les $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules $'H$ et $''H$. $'H$ sera utilisé dans la démonstration du théorème de régularité. Dans ce paragraphe, on l'utilisera pour démontrer les questions de dimension dans le théorème de Milnor.

5.3.1 Définition du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module $'H$.

On pose $H = H^n(\Omega_{X/D,0})$ et on peut voir que $H = \frac{\{w/dw \in df \wedge \Omega_{X,0}^n\}}{df \wedge \Omega_{X,0}^{n-1} + d\Omega_{X,0}^{n-1}}$. Motivé par la remarque 5.2.3, on définit alors:

DEFINITION 5.3.1 $'H = \frac{\Omega_{X,0}^n}{df \wedge \Omega_{X,0}^{n-1} + d\Omega_{X,0}^{n-1}}$. Il s'agit en fait du n -ième groupe de cohomologie du complexe $\Omega_{X/D}$ auquel on a remplacé $\Omega_{X/D}^{n+1}$ par 0.

On rappelle que $\tilde{\nabla}$ est une $(H, 'H)$ -connexion, où

$$\begin{array}{ccc} \hat{\nabla} : H & \rightarrow & 'H \\ \bar{w} & \mapsto & \frac{dw}{df} \end{array}$$

LEMME 5.3.2 H et $'H$ sont des $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules. La multiplication par un élément de $\mathcal{O}_{D,0}$ est définie par $\phi(s)\bar{w} = \overline{\phi(f)w}$.

5.3.2 Utilisation du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module $'H$ pour le calcul de la dimension des fibres du fibré de Gauss Manin dans le cas où $n \geq 1$.

On veut démontrer le théorème suivant:

THEOREME 5.3.3 Pour $n \geq 1$, on a:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(X(s), \mathbb{C}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n \\ \mu & \text{si } p = n \end{cases}$$

Dans le chapitre précédent, on a démontré que le faisceau des sections holomorphes de GM était isomorphe à la restriction du faisceau HDR à D^* . On admettra la généralisation suivante:

THEOREME 5.3.4 La restriction de $H^p(f_*(\Omega_{X/D}))$ à D^* est isomorphe au faisceau des sections holomorphes du fibré $s \rightarrow H^p(X(s), \mathbb{C})$.

Alors, le rang de $H^p(f_*(\Omega_{X/D}))$ est égal à la dimension des $H^p(X(s), \mathbb{C})$. Et ainsi, pour démontrer le théorème 5.3.3, il suffit de démontrer:

THEOREME 5.3.5 *Pour $n \geq 1$, on a:*

$$b_p = \text{rg } H^p(f_*(\Omega_{X/D})) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n \\ \mu & \text{si } p = n \end{cases}$$

On va donner une démonstration de ce théorème. On remarque tout d'abord que $\text{rg } H^p(f_*(\Omega_{X/D})) = \text{rg } H^p(\Omega_{X/D})$ d'après le théorème 5.1.3.

Isomorphisme entre $H^p(\Omega_{X/D})$ et $H^{p+1}(df \wedge \Omega_X)$.

LEMME 5.3.6 *$df \wedge . : \Omega_{X/D} \rightarrow df \wedge \Omega_X$ est un anti-isomorphisme de complexes où $\Omega_{X/D}$ désigne le faisceau $\Omega_{X/D}$ avec $\Omega_{X/D,0}^{n+1}$ remplacé par 0.*

Démonstration

- On admet que l'on a la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{df \wedge} \Omega_X^1 \xrightarrow{df \wedge} \dots \xrightarrow{df \wedge} \Omega_X^{n+1}$ même en 0. La démonstration de cette suite exacte utilise les complexes de Koszul (voir[6]). D'où l'isomorphisme $df \wedge . : \Omega_{X/D}^p \rightarrow df \wedge \Omega_X^p$ pour $p \leq n$.
- Cette application commute avec la différentielle car $d(df \wedge w) = -df \wedge dw$.

□

COROLLAIRE 5.3.7 *$H^p(\Omega_{X/D}) \cong H^{p+1}(df \wedge \Omega_X)$.*

Démonstration

On a le résultat immédiatement par le lemme 5.3.6.

□

Rapport entre $H^p(\Omega_{X/D})$ et $H^p(\Omega_{X/D})$.

LEMME 5.3.8 *Pour $p \geq 1$, $H^p(\Omega_{X/D}) \xrightarrow{\partial_p} H^p(\Omega_{X/D})$ est un isomorphisme et on a la suite exacte: $0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(\Omega_{X/D}) \rightarrow H^0(\Omega_{X/D}) \rightarrow 0$.*

Démonstration

On a la suite exacte de complexes: $0 \rightarrow df \wedge \Omega_X \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{X/D} \rightarrow 0$ qui donne la suite exacte longue de cohomologie:

$$0 \rightarrow H^0(df \wedge \Omega_X) \rightarrow H^0(\Omega_X) \rightarrow H^0(\Omega_{X/D}) \rightarrow H^1(df \wedge \Omega_X) \rightarrow H^1(\Omega_X) \rightarrow H^1(\Omega_{X/D}) \rightarrow \dots$$

Or:

- $H^0(df \wedge \Omega_X) = 0$.
- $H^{i+1}(df \wedge \Omega_X) = H^i(\Omega_{X/D})$.

- $H^p(\Omega_{\dot{X}}) = 0$ pour tout $p \geq 1$ d'après le lemme de Poincaré.
- $0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{\dot{X}}^0 \rightarrow \Omega_{\dot{X}}^1 \rightarrow \dots$ est une résolution de $\underline{\mathbb{C}}$ donc $H^0(\Omega_{\dot{X}}) \cong \underline{\mathbb{C}}$.

En remplaçant dans la suite exacte longue, on a exactement le résultat. □

Démonstration du théorème 5.3.5 dans le cas $p \geq n + 1$.

- Pour $p > n + 1$, on a immédiatement $H^p(\Omega_{\dot{X}/D}) = 0$.
- Pour $p = n + 1$, $H^{n+1}(\Omega_{\dot{X}/D}) \cong H^{n+1}({}'\Omega_{\dot{X}/D}) = 0$ par définition de $'\Omega_{\dot{X}/D}$.

D'où $b_p = 0$ pour tout $p \geq n + 1$.

Démonstration du théorème 5.3.5 dans la cas $p \leq n - 1$.

On sait que $'\Omega_{\dot{X}/D}$ est le complexe $\Omega_{\dot{X}/D}$ avec $\Omega_{\dot{X}/D,0}^{n+1}$ remplacé par 0. Ainsi, pour tout $p \leq n - 1$, on a l'isomorphisme: $i : H^p(\Omega_{\dot{X}/D}) \rightarrow H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})$. D'où une application $D_p = i^{-1} \circ \partial_p : H^p(\Omega_{\dot{X}/D}) \rightarrow H^p(\Omega_{\dot{X}/D})$ qui est un isomorphisme pour $0 < p \leq n - 1$ et est surjectif pour $p = 0$. En fait, si on regarde les différentes applications qui permettent d'arriver à D_p , on voit qu'on peut la définir de la manière suivante: on considère $w \in Z(\Omega_{\dot{X}/D}^p)$ et on le relève en un $\tilde{w} \in \Omega_{\dot{X}}^p$. On a alors $d\tilde{w} = df \wedge \tilde{\pi}$ et alors $D_p(\tilde{w}) = \tilde{\pi}$ où $\tilde{\pi}$ est l'image de \tilde{w} dans $\Omega_{\dot{X}/D}^p$. Comme dans le paragraphe 5.2, on montre que D_p est une connexion sur $H^p(\Omega_{\dot{X}/D})$. De plus, $H^p(\Omega_{\dot{X}/D})$ est de type fini. On en déduit qu'il est libre et le noyau de D_p est un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension égale à b_p . Or,

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker D_p = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p \leq n - 1 \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

D'où $b_0 = 1$ et $b_p = 0$ pour $0 < p \leq n - 1$.

Démonstration du théorème 5.3.5 dans la cas $p = n$.

On a: $H^p(\Omega_{\dot{X}/D}) = \frac{Z(\Omega_{\dot{X}/D})}{d\Omega_{\dot{X}/D}}$ et $H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D}) = \frac{\Omega_{\dot{X}/D}}{d\Omega_{\dot{X}/D}}$. D'où une injection naturelle de $H^p(\Omega_{\dot{X}/D})$ dans $H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})$.

On note ici $D : H^p(\Omega_{\dot{X}/D}) \rightarrow H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})$ la bijection notée ∂_n précédemment. On voit que D coïncide avec $\tilde{\nabla}$ et il s'agit donc d'une $(H^p(\Omega_{\dot{X}/D}), H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D}))$ -connexion.

D'autre part, on a l'isomorphisme $\frac{H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})}{H^p(\Omega_{\dot{X}/D})} \cong \frac{\Omega_{\dot{X}/D}^n \cdot d}{Z(\Omega_{\dot{X}/D}^n \cdot d)} \longrightarrow \Omega_{\dot{X}/D}^{n+1}$.

En effet, d est surjective et le noyau est $Z^n(\Omega_{\dot{X}/D})$. Enfin, d'après la remarque 3.3.5, $\Omega_{\dot{X}/D}^{n+1} \cong \frac{\mathcal{O}_{\dot{X}}}{J(f)}$. D'où $\dim \frac{H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})}{H^p(\Omega_{\dot{X}/D})} = \mu$ (par définition de μ) et $\frac{H^p({}'\Omega_{\dot{X}/D})}{H^p(\Omega_{\dot{X}/D})}$

est de torsion car $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$. Pour conclure, on utilise le théorème d'indice:

THEOREME 5.3.9 *Soit D une (E, F) -connexion. Supposons E et F de type fini sur \mathcal{O} et $\frac{F}{E}$ de torsion. Alors:*

1. *Le noyau et le conoyau de D sont de dimension finie sur \mathbb{C} .*
2. $\chi(D, E, F) = \dim_{\mathbb{C}} \ker D - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker} D$ et $\chi(D, E, F) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{F}{E} = \operatorname{rg} E$.

Une démonstration de ce théorème est donné en annexe (voir [6]).
Or D est bijective donc $\dim_{\mathbb{C}} \ker D = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker} D = 0$ et $\dim_{\mathbb{C}} \frac{F}{E} = \mu$. Dès lors, $\operatorname{rg} H^n(\Omega_{X/D}) = \mu$.

On a ainsi démontré le théorème 5.3.5 en totalité.

5.3.3 Définition du $\mathcal{O}_{D,0}$ -module ${}''H$.

DEFINITION 5.3.10 *On pose ${}''H = \frac{\Omega_{X,0}^{n+1}}{df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1}}$. Il s'agit d'un $\mathcal{O}_{D,0}$ -modules. La multiplication par un élément de $\mathcal{O}_{D,0}$ est définie par $\phi(s)[w] = [\phi(f)w]$.*

LEMME 5.3.11 *$'H \xrightarrow{df \wedge} {}''H$ est une application $\mathcal{O}_{D,0}$ -linéaire injective, ce qui donne à $'H$ une structure de sous $\mathcal{O}_{D,0}$ -module de ${}''H$.*

Démonstration

- Cette application est $\mathcal{O}_{D,0}$ -linéaire car $g.(df \wedge w) = df \wedge (g.w)$.
- Soit $\bar{\alpha} \in \frac{\Omega_X^n}{df \wedge \Omega_X^{n-1} + d\Omega_X^{n-1}}$ telle que $\widehat{df \wedge \alpha} = 0$. Alors $df \wedge \alpha = df \wedge d\beta$. D'où $df \wedge (\alpha - d\beta) = 0$. Dès lors, d'après le lemme 4.4.2, $\alpha - d\beta = df \wedge \eta$. D'où $\bar{\alpha} = 0$. Ainsi, $df \wedge \cdot$ est injective.

□

LEMME 5.3.12 *On a l'inclusion ${}''H \subset H[\frac{1}{s}]$.*

Démonstration

D'après le lemme précédent, $'H \xrightarrow{df \wedge} {}''H$ est une application $\mathcal{O}_{D,0}$ -linéaire injective. Donc sa restriction à H également. Ainsi, $H \cong \frac{df \wedge Z^n(\Omega_{X,0})}{df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1}}$. Et comme d'après la proposition 5.2.1 $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$ et $f^l \Omega_{X/D}^n \subset Z^n(\Omega_{X/D})$, on a le résultat cherché.

□

LEMME 5.3.13 *$\frac{{}''H}{'H} \cong \Omega_{X/D,0}^{n+1}$ donc de torsion et de dimension μ sur \mathbb{C} .*

Démonstration

D'après le lemme 5.3.11, $'H \cong \frac{df \wedge \Omega_{X,0}^n}{df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1}}$. Dès lors, $\frac{{}''H}{'H} \cong \frac{\Omega_{X,0}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{X,0}^n} = \Omega_{X/D,0}^{n+1}$.

□

5.3.4 Ecriture de $\tilde{\nabla}$ dans $'H$ et $''H$.

On rappelle que l'on a trois \mathcal{O}_D -modules $H \subset' H \subset'' H \subset H[\frac{1}{s}]$ et une $(H, 'H)$ -connexion $\hat{\nabla}$ définie dans le paragraphe 5.2.

Ecriture de $\tilde{\nabla}$ dans $'H$.

Soit $\bar{w} \in' H$. On le relève en $w \in \Omega_X^n$. On sait d'après la démonstration de la proposition 5.2.1 qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \Omega_X^{n+1} \subset df \wedge \Omega_X^n$. Or $dw \in \Omega_X^{n+1}$ donc il existe α tel que $f^l dw = df \wedge \alpha$ et α holomorphe. On pose alors $'\tilde{\nabla}(\bar{w}) = \frac{1}{s^l} \otimes \bar{\alpha}$. On récupère ainsi une connexion méromorphe sur $'H$.

Ecriture de la connexion dans $''H$.

On va commencer par construire une connexion de $df \wedge 'H$ dans $''H$. Regardons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} [w] \in H & \longrightarrow & [df \wedge w] \in'' H \\ \tilde{\nabla} \downarrow & & \downarrow ''\tilde{\nabla} \\ [\alpha] \in' H & \longrightarrow & [df \wedge \alpha] = [dw] = d\left(\frac{df \wedge w}{df}\right) \in'' H \end{array}$$

La connexion $''\tilde{\nabla} : df \wedge 'H \rightarrow df \wedge ''H$ s'étend en une connexion $''\tilde{\nabla} : df \wedge ''H \rightarrow'' H$ en posant $''\tilde{\nabla}([df \wedge w]) = dw$. On remarque alors que si $[\eta] \in'' H$ alors $= s^l [\eta] = [df \wedge \alpha]$ et on peut ainsi prolonger $''\tilde{\nabla}$ en remarquant que:

$$\begin{aligned} ''\tilde{\nabla}(s^l [\eta]) &= d\alpha \\ &= s^l ''\tilde{\nabla}([\eta]) + ls^{l-1} [\eta] \end{aligned}$$

On pose alors

$$''\tilde{\nabla}(\eta) = \frac{1}{s^l} \otimes d\alpha - \frac{l}{s} \otimes \eta$$

On vérifie alors qu'il s'agit bien d'une connexion méromorphe.

- $''\tilde{\nabla}$ est bien définie par construction.
- La linéarité est évidente.
- Vérifions l'identité de Leibniz. Supposons $s^l \cdot \eta = df \wedge \alpha$. Alors $s^l g \cdot \eta = df \wedge g \cdot \alpha$. Et ainsi,

$$\begin{aligned} ''\tilde{\nabla}(g \cdot \eta) &= \frac{1}{s^l} \otimes d(g \cdot \alpha) - \frac{l}{s} \otimes g \cdot \alpha \\ &= \frac{1}{s^l} \otimes \frac{dg}{ds}(f) df \wedge \alpha + g''\tilde{\nabla}(\eta) \\ &= \frac{dg}{ds} \cdot \eta + g''\tilde{\nabla}(\eta) \end{aligned}$$

Ainsi, $''\tilde{\nabla}$ est une connexion sur $''H$.

5.4 isomorphisme entre $(HDR_{|D^*}, \tilde{\nabla})$ et le faisceau des sections holomorphes de GM muni de la connexion ∇ .

Pour démontrer que la connexion de Gauss Manin ∇ est régulière, on va démontrer que $\tilde{\nabla}$ est régulière et la proposition suivante permettra de conclure:

PROPOSITION 5.4.1 *Via l'isomorphisme $HDR_{|D^*} \rightarrow \underline{GM}$ détaillé dans le chapitre précédent, on a $\tilde{\nabla} \cong \nabla$.*

Démonstration

Soit $\bar{w} \in HDR_{s_0}$ et $\tilde{w} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$, $d_{X/D}$ -fermé défini dans la construction de $\tilde{\nabla}$. Il existe alors $\tilde{\alpha} \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$ tel que $d\tilde{w} = df \wedge \tilde{\alpha}$. On a $\tilde{\nabla}(\bar{w}) = \tilde{\alpha}_{s_0}$ où α est l'image de $\tilde{\alpha}$ dans $H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_{X/D}^n)$.

On pose toujours $\tilde{w}|_{X(s)} = \gamma_s$ avec $\gamma_s = \sum_{j=1}^{\mu} a_j(s)C_s^j$. Alors, $\nabla((\gamma_s)_s) = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial a_j}{\partial s}(s)C_s^j$, d'après la définition de la connexion de Gauss Manin. Or, on avait vu lors de la démonstration de l'isomorphisme (page 45) que

$$a_j(s) = \int_{f=s} \tilde{w} \wedge \eta_s^j$$

et qu'on était dans les condition du lemme 4.1.2. Ainsi d'après le deuxième point de ce lemme, on a:

$$\frac{\partial a_j}{\partial s}(s) = \int_{f=s} \tilde{\alpha} \wedge \eta_s^j$$

Or $\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^{\mu} b_j C_s^j$, d'où $b_j = \frac{\partial a_j}{\partial s}(s)$ (On utilise le fait que (C_s^j) est la base duale de (η_s^j) via l'intégration sur $\{f = s\}$). Dès lors, on a l'égalité:

$$\tilde{\nabla}(\bar{w}) = \nabla((\gamma_s)_s)$$

et donc on a l'isomorphisme de connexions recherché.

□

5.5 Les théorèmes de Phragmen-Lindelöf.

Ces théorèmes sont des extensions du théorème du module maximum.

THEOREME 5.5.1 *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C}^n . Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et s'il existe $w \in \Omega$ tel que $|f(z)| \leq |f(w)|$ pour tout z dans un voisinage de w alors $f(z) = f(w)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Nous allons donner quatre théorèmes. Les démonstrations proviennent de [8]. Le dernier théorème sera utilisé dans la démonstration de la régularité de la connexion de Gauss Manin. Les trois premiers servent à sa démonstration.

THEOREME 5.5.2 *Soit C une courbe fermée et simple (sous variété de dimension 1 connexe et compacte) et $f(z)$ holomorphe à l'intérieur de cette courbe et sur C sauf en un point P de C . Supposons:*

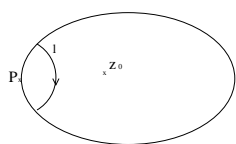
- $|f(z)| \leq M$ sur C sauf en P .
- Il existe $w(z)$ holomorphe tel que $|w(z)| \leq 1$ et est non nul dans l'intérieur de C (simplement connexe) et pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un système de courbes arbitrairement proche de P joignant les deux cotés de C autour de P sur lequel $|w(z)^\epsilon f(z)| \leq M$.

Alors $|f(z)| \leq M$ en tous points à l'intérieur de C .

Démonstration

On considère $F(z) = w(z)^\epsilon f(z)$ holomorphe à l'intérieur de C . Soit z_0 un point de l'intérieur de C . On veut montrer que $|f(z_0)| \leq M$.

- On a d'après les hypothèses une courbe l dans l'intérieur de C joignant les deux cotés de C autour de P et assez proche de P de sorte que la courbe passe entre P et z_0 et sur laquelle $|w(z)^\epsilon f(z)| \leq M$.
- On construit alors une courbe fermée ne passant pas par P (on remplace la portion autour de P par la courbe précédente).



Sur ce contour, on a $|w(z)^\epsilon f(z)| \leq M$ d'après le premier point des hypothèses combiné avec $|w(z)| \leq 1$ et le point précédent. De plus, sur ce contour et à l'intérieur $F(z)$ est holomorphe. Ainsi, d'après le principe du module maximum, on a l'inégalité partout à l'intérieur de cette courbe et donc, en particulier en z_0 . D'où $|f(z_0)| \leq M|w(z_0)|^{-\epsilon}$. Or, on a raisonné avec ϵ arbitraire. On peut donc faire tendre ϵ vers 0 et on obtient $|f(z_0)| \leq M$ ce qui termine la démonstration.

□

On peut toujours supposer, quitte à utiliser les représentations conformes (application biholomorphe qui envoie le point singulier à l'infini), que le point singulier est à l'infini. Dans ce cas, la courbe C n'est pas fermée, le système de

courbes arbitrairement proche du point singulier devient un système de courbes s'éloignant à l'infini.

On a maintenant le deuxième théorème de Phragmen-Lindelöf:

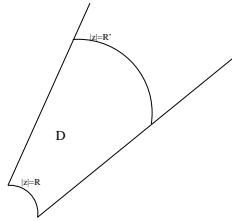
THEOREME 5.5.3 Soit $f(z)$ une fonction analytique en $z = re^{i\theta}$, holomorphe dans un secteur $D = \{z \in \mathbb{C} / \theta_1 < \arg z < \theta_1 + \frac{\pi}{\alpha}, |z| > R\}$ entre deux demi-droites faisant un angle de $\frac{\pi}{\alpha}$ en l'origine et holomorphe sur le bord de ce secteur. Supposons $|f(z)| \leq M$ sur le bord de D et $f(z) = O(e^{r^\beta})$ quand $r \rightarrow +\infty$ où $\beta < \alpha$ uniformément en θ . Alors $|f(z)| \leq M$ sur le secteur D .

Démonstration

Quitte à faire une rotation, on peut supposer que les deux demi-droites sont $\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$.

- Considérons $F(z) = e^{-\epsilon z^\gamma} f(z)$ avec $\beta < \gamma < \alpha$ et $\epsilon > 0$. Alors:

$$|F(z)| \leq e^{-\epsilon r^\gamma \cos \gamma \theta} |f(z)|$$



- Sur le bord, $|F(z)| \leq |f(z)| \leq M$ (car $e^{-\epsilon r^\gamma \cos \gamma \theta} \leq 1$ et $|f(z)| \leq M$ sur le bord par hypothèse).
- Sur l'arc $\arg \theta \leq \frac{\pi}{2\alpha}$ et $|z| = R' > R$, on a:

$$|F(z)| \leq e^{-\epsilon R'^\gamma \cos \gamma \theta} |f(z)|$$

et pour R' assez grand, $|f(z)| \leq A e^{R'^\beta}$. D'où:

$$|F(z)| \leq A e^{R'^\beta - \epsilon R'^\gamma \cos \frac{\gamma \pi}{2\alpha}}$$

Or pour tout ϵ , le deuxième terme de l'inégalité tend vers 0 quand R' tend vers l'infini. Dès lors, à ϵ fixé et pour R' suffisamment grand, on a $|F(z)| \leq M$.

- Par le théorème du module maximum utilisé sur le secteur $\arg \theta \leq \frac{\pi}{2\alpha}$, $r \leq R'$, on a $|F(z)| \leq M$.
- Or, on a ce résultat pour tout R' suffisamment grand donc, en faisant tendre R' vers l'infini, on a la même inégalité sur D tout entier. D'où par définition de F , on a $|f(z)| \leq M e^{\epsilon z^\gamma}$. On fait alors tendre ϵ vers 0 et on obtient $|f(z)| \leq M$ sur D .

□

THEOREME 5.5.4 Si $f(z) \rightarrow a$ quand $z \rightarrow \infty$ le long de deux demi-droites et $f(z)$ holomorphe et bornée à l'intérieur d'un secteur D défini comme dans le théorème précédent, alors $f(z) \rightarrow a$ uniformément sur tout le secteur.

Démonstration

On peut supposer que la limite est égale à 0. De plus, quitte à faire la substitution $z = w^k$, on peut également supposer que les deux demi-droites forment un angle de longueur $< \pi$. Enfin, on peut, quitte à faire une rotation, considérer les demi-droites $\theta = \pm\theta'$ avec $\theta' < \frac{\pi}{2}$. On pose alors $F(z) = \frac{z}{z+\lambda}f(z)$ avec $\lambda > 0$. Alors:

$$|F(z)| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 2r\lambda\cos\theta + \lambda^2}}|f(z)| < \frac{r}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}}|f(z)|$$

De plus, on sait que $|f(z)| \leq M$ sur tout le secteur et $|f(z)| < \epsilon$ pour $r > r_1 = r_1(\epsilon) > R$ et $\theta = \pm\theta'$. Soit alors $\lambda = \frac{r_1 M}{\epsilon}$. Alors:

- Pour $R \leq r \leq r_1$, $|F(z)| < \frac{rM}{\lambda} \leq \epsilon$.
- Pour $r > r_1$ et $\theta = \pm\theta'$, on a $|F(z)| < |f(z)|$ car $\frac{r}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}} < 1$. Dès lors, $|F(z)| < \epsilon$.

On considère $w(z) = \frac{1}{1+z}$. On a alors $F(z)$ holomorphe à l'intérieur du secteur D' délimité par r_1 et les demi-droites $\theta = \pm\theta'$ et holomorphe sur le bord. $|F(z)| < \epsilon$ sur le bord de D' . De plus, $\lim_{|z| \rightarrow 0} w(z)^\epsilon F(z) = 0$ et ainsi, on a la dernière hypothèse du théorème 5.5.2. ($f \rightarrow F$, $M \rightarrow \epsilon$, $\epsilon \rightarrow \epsilon'$). Ainsi, $|F(z)| < \epsilon$ partout sur le secteur. D'où par définition de F , $|f(z)| \leq (1 + \frac{\lambda}{|z|})|F(z)| < 2\epsilon$ pour tous les z tel que $|z| > \lambda$. D'où le résultat. □

Maintenant, on va énoncer le théorème que l'on utilisera lors de la démonstration de la régularité de la connexion de Gauss Manin.

THEOREME 5.5.5 *Soit $f(z)$ une fonction analytique en $z = re^{i\theta}$, holomorphe dans un secteur $D = \{z \in \mathbb{C} / \theta_1 < \arg z < \theta_1 + \frac{\pi}{\alpha}, |z| > R\}$ d'ouverture $< \frac{\pi}{\alpha}$ et holomorphe sur le bord du secteur. On suppose que sur ce bord, $f(z) \rightarrow a$ quand $r \rightarrow \infty$ et que $f(z) = O(e^{r^\beta})$ quand $r \rightarrow \infty$ avec $\beta < \alpha$. Alors, $f(z) \rightarrow a$ quand $r \rightarrow \infty$ uniformément en θ .*

Démonstration

Pour démontrer ce théorème, on commence par appliquer le théorème 5.5.3. En effet, le fait que $f(z) \rightarrow a$ quand $r \rightarrow \infty$ et que l'on travaille sur un tel secteur permet de montrer que f est borné sur le bord de D et par le théorème, f est borné sur tout le secteur. Dès lors, on peut utiliser le théorème 5.5.4 et conclure. □

En fait, dans la démonstration de la régularité de la connexion de Gauss Manin, on va utiliser ce théorème à l'origine. Il devient alors:

THEOREME 5.5.6 *Soit $f(z)$ une fonction analytique en $z = re^{i\theta}$, holomorphe dans un secteur $\Sigma_{\alpha,\beta,r}$ d'ouverture $< \frac{\pi}{\alpha}$ et holomorphe sur le bord du secteur. On suppose*

- $f(z) \rightarrow a$ quand $|z| \rightarrow 0$ et $\arg z = \alpha$ ou $\arg z = \beta$.
- $f(z) = O(e^{\frac{A}{|z|^\beta}})$ quand $|z| \rightarrow 0$ avec $\beta < \alpha$.

Alors $f(z) \rightarrow a$ quand $|z| \rightarrow 0$ uniformément en θ .

On a été obligé de minorer le secteur D dans le théorème 5.5.5 pour avoir un secteur borné dans le théorème 5.5.6 mais les résultats des théorèmes 5.5.3, 5.5.4, 5.5.5 sont valables sur des secteurs non minorés.

5.6 Régularité de la connexion de Gauss Manin.

On va démontrer maintenant la régularité de la connexion $\tilde{\nabla}$ qui via l'isomorphisme ci-dessus donnera la régularité de la connexion de Gauss Manin. Cette démonstration est donné par B. Malgrange dans [8].

THEOREME 5.6.1 *La connexion $\tilde{\nabla}$ est régulière.*

Démonstration

Pour démontrer la régularité de la connexion de Gauss Manin, on va démontrer qu'elle est régulière en tant que connexion méromorphe sur $'H$.

1. On considère $T \xrightarrow{\pi} D^*$ le revêtement universel de D^* . Pour tout $t \in T$, soit $\gamma(t) \in H_n(X(\pi(t)), \mathbb{C})$ tel que $\gamma(t)$ dépende continûment de t , c'est-à-dire que pour t' voisin de t , $\gamma(t')$ est l'image de $\gamma(t)$ par l'isomorphisme canonique:

$$H_n(X(\pi(t')), \mathbb{C}) \cong H_n(X(\pi(t)), \mathbb{C})$$

Par abus de notation, on écrira $\gamma(s)$ au lieu de $\gamma(t)$ avec $\pi(t) = s$ en précisant si nécessaire l'argument de s .

Soit $w \in H^0(X, \Omega_X^n)$ et considérons la fonction sur s (fonction multiforme sur D^*) définie par:

$$I(s) = \int_{\gamma(s)} w = \int_{\gamma(s)} w|_{X(s)}$$

Montrons que cette fonction ne dépend que de la classe de w dans $'H = \frac{\Omega_X^n/D}{d\Omega_X^{n-1}}$, qu'elle est holomorphe et que $\frac{d}{ds} \int_{\gamma(s)} w = \int_{\gamma(s)} \tilde{\nabla}([w])$.

- (a) Si $w = w' + df \wedge \alpha + d\beta$, alors $w|_{X(s)} = w'|_{X(s)} + d\beta|_{X(s)}$ et $\int_{\gamma(s)} d\beta|_{X(s)} = \int_{\partial\gamma(s)} \beta|_{X(s)} = 0$. Donc l'intégrale ne dépend que de la classe de w dans $'H$.
- (b) Montrons maintenant que I est holomorphe.
Soit $s_0 \in D^*$. Montrons que I est holomorphe en s_0 . On considère $\Delta \ni s_0$ ouvert de D^* tel que $f^{-1}(\Delta) \xrightarrow{\cong} X(s_0) \times \Delta$ soit un difféomorphisme. Soit alors $s \in \Delta$. On pose $\Gamma = \gamma(s_0) \times [s_0, s]$ et on a $\gamma(s) = \Phi^{-1}(\gamma(s_0) \times \{s\})$. Calculons $I(s) - I(s_0)$.

$$\begin{aligned} I(s) - I(s_0) &= \int_{\gamma(s)} w - \int_{\gamma(s_0)} w \\ &= \int_{\gamma(s) \times \{s\} - \gamma(s_0) \times \{s_0\}} (\Phi^{-1})^*(w) \\ &= \int_{\partial\Gamma} (\Phi^{-1})^*(w) \\ &= \int_{\Gamma} d((\Phi^{-1})^*(w)) \\ &= \int_{\Gamma} (\Phi^{-1})^*(dw) \\ &= \int_{\Gamma} (\Phi^{-1})^*(df \wedge \alpha) = \int_{\Gamma} ds \wedge (\Phi^{-1})^*(\alpha) \end{aligned}$$

car dw est de degré maximum et $f^{-1}(\Delta)$ est de Stein et le lemme 4.4.1 au degré $n+1$ donne l'existence de $\alpha \in H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega_X^n)$. Or d'après Fubini et comme $\gamma(s_0) \times [s_0, s] = \Gamma$, on a :

$$I(s) - I(s_0) = \int_{s_0}^s \left(\int_{\gamma(s_0) \times \{t\}} (\Phi^{-1})^*(\alpha) \right) dt$$

$(\Phi^{-1})^*(\alpha)$ est une n -forme holomorphe, l'intégrale $\int_{\gamma(s_0) \times \{t\}} (\Phi^{-1})^*(\alpha)$ est convergente ainsi que $\int_{\gamma(t_0) \times \{t\}} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^{-1})^*(\alpha)$ car on intègre sur un compact. Donc $\int_{\gamma(s_0) \times \{t\}} (\Phi^{-1})^*(\alpha)$ est holomorphe par rapport à t . Ensuite on intègre une fonction holomorphe sur $[s_0, s]$ donc l'intégrale est holomorphe par rapport à s . Ainsi $I(s)$ est holomorphe.

(c) Maintenant, il reste à montrer que $\frac{d}{ds} \int_{\gamma(s)} w = \int_{\gamma(s)} \alpha$.

On sait que $I(s) - I(s_0) = \int_{s_0}^s \left(\int_{\gamma(s_0) \times \{t\}} (\Phi^{-1})^*(\alpha) \right) dt$. D'où

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{I(s) - I(s_0)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{s - s_0} \int_{s_0}^s \left(\int_{\gamma(s_0) \times \{t\}} (\Phi^{-1})^*(\alpha) \right) dt \int_{\gamma(s_0)} \alpha$$

et on a ainsi le résultat.

- Le fait que HDR soit libre nous permet de considérer w_1, \dots, w_μ représentants dans $H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$ d'une base de ${}^tH \otimes_{\mathcal{O}} K$. En effet, on considère les représentants d'une base de HDR , il s'agit de représentants d'une base sur K de tH ($H \subset {}^tH \subset H[\frac{1}{s}]$). Posons alors $\tilde{\nabla}(\overline{w_j}) = \sum c_{kj} \overline{w_k}$, $c_{kj} \in K$ et $I_j(s) = \int_{\gamma(s)} [w_j]$. On aura alors:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I_j(s) &= \int_{\gamma(s)} \sum_{k=1}^{\mu} c_{kj} \overline{w_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} c_{kj} \int_{\gamma(s)} \overline{w_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} c_{kj} I_k(s) \end{aligned}$$

Donc (I_1, \dots, I_μ) est une solution du système différentiel dual de celui qui définit les sections horizontales de $\tilde{\nabla}$ (dual au sens où $\frac{d\Lambda}{ds} = -C\Lambda$ et $\frac{d}{ds} {}^tI = {}^tIC$ et $\frac{d}{ds} ({}^tI\Lambda) = 0$).

On considère maintenant l'application bilinéaire:

$$\begin{aligned} \Psi : H_n(X(s_0), \mathbb{C}) \times H^0(X, \Omega_{X/D}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\gamma, w) &\mapsto \int_{\gamma(s_0)} w \end{aligned}$$

Si pour tout $w \in H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$, $\int_{\gamma(s_0)} w = 0$, alors, pour tout $w \in H^0(X, \Omega_X^n)$, on a $\int_{\gamma(s_0)} w = 0$ (car $w = df \wedge \beta$ donne une intégrale nulle) et par la dualité entre $H_n(X(s_0), \mathbb{C})$ et $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$, on a $\gamma(s_0) = 0$. Ainsi, on considère la base duale de $(w_j|_{X(s_0)})_{j=1, \dots, \mu}$ dans $H_n(X(s_0), \mathbb{C})$

que l'on note γ_j . On a ainsi un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $\frac{d}{ds}I_j(s) = \sum c_{jk}I_k(s)$:

$$(I_{jk})_{j,k=1,\dots,\mu}$$

où $I_{jk}(s) = \int_{\gamma_k(s)} w_j$. On remarque en effet que chaque colonne est solution de l'équation différentielle et qu'elles sont linéairement indépendantes grâce à la propriété de l'application Ψ .

3. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer que les $I_j(s)$ sont à croissance modérée, c'est-à-dire:

lorsque $s \rightarrow 0$, avec $\alpha \leq \arg s \leq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), il existe N tel que $s^{-N}I_j(s)$ soit borné.

(c.f. BOREL: *Algebraic D-Module (HAEFLIGER exposé 3)*.)

4. On va en fait obtenir un résultat plus précis qui repose sur le lemme suivant:

LEMME 5.6.2 *Soit $w \in H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$. Pour tout γ défini comme précédemment, on a*

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \arg s = 0}} \int_{\gamma(s)} w = 0$$

Démonstration

Choisissons un $\tilde{w} \in H^0(X, \Omega_X^n)$ dont l'image dans $H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$ soit w . Ceci est possible car X est de Stein et par définition de $\Omega_{X/D}^n$, on a la suite exacte: $0 \rightarrow df \wedge \Omega_X^{n-1} \rightarrow \Omega_{X/D}^n \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow 0$.

Choisissons d'autre part $s_0 \in D$, $s_0 > 0$, et soit $Y = f^{-1}([0, s_0]) \subset X$. On a démontré à la fin du chapitre 1 que Y était contractile. De plus, Y est un espace semi-analytique.

REMARQUE 5.6.3 (a) *On dit que Y espace topologique est triangulé si et seulement si il existe $K = \bigcup \sigma$ tel que:*

- K est un complexe simplicial c'est-à-dire une collection de simplexes σ homéomorphe à l'un des simplexes affines ($\{(x_0, \dots, x_p) / x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$ avec $p \leq n$) tels que: si $\sigma \in K$ alors toutes les faces de σ sont dans K et si $\sigma, \tau \in K$ alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et de τ ou l'ensemble vide.
- Il existe un homéomorphisme $h : |K| \rightarrow Y$

On dit alors que Y est homéomorphe à un complexe simplicial ou triangulé.

(b) **THEOREME 5.6.4 (Théorème de Lojasiewicz)** *Si Y est semi-analytique, alors Y possède une triangulation semi-analytique.*

Une version plus précise est: on peut trouver une triangulation semi-analytique K de Y telle que $X(s_0)$ soit un sous complexe K_0 de K . On a donc

$$Y = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \text{ et } X(s_0) = \bigcup_{\sigma \in K_0} \sigma \text{ avec } K_0 \subset K$$

On considère alors Γ_{s_0} un cycle de K_0 représentant de $\gamma(s_0) \in H_n(X(s_0), \mathbb{C})$. Comme Y est contractile, on peut trouver une chaîne Δ de K tel que $\partial\Delta = \Gamma_{s_0}$. On a alors le théorème:

THEOREME 5.6.5 (Théorème de Herrera) $\int_{\Gamma_{s_0}} \tilde{w}$ et $\int_{\Delta} d\tilde{w}$ existent.

En fait, l'intégrale sur un domaine semi-analytique peut ne pas être définie. Mais M. Herrera, dans [9], montre que ces intégrales existent car on intègre sur la partie lisse de l'espace semi-analytique. De plus, on a le théorème de Stokes dans le cas semi-analytique:

THEOREME 5.6.6 (Théorème de Stokes-Herrera) $\int_{\partial\Delta} \tilde{w} = \int_{\Delta} d\tilde{w}$

Posons maintenant pour $s \in]0, s_0]$, $\Delta_s = f^{-1}([0, s]) \cap \Delta$ et montrons qu'on a : $I(s) = \int_{\Delta_s} d\tilde{w}$.

Quitte à remplacer la triangulation K donnée par une subdivision convenable, on peut supposer que $X(s)$ est un sous complexe de K . On aura alors $\Delta = \Delta_s + \Delta'$, le support des simplexes de Δ' étant contenu dans $f^{-1}([s, s_0])$. On aura alors $\partial\Delta' = \Gamma_{s_0} - \Gamma_s$ et $\text{supp } \Gamma_s \subset X(s)$. Par Stokes-Herrera, on a :

$$\int_{\Delta'} d\tilde{w} = \int_{\Gamma_{s_0} - \Gamma_s} \tilde{w} = I(s_0) - I(s)$$

D'où $I(s) = I(s_0) - \int_{\Delta'} d\tilde{w} = \int_{\Delta_s} d\tilde{w}$.

Pour établir le lemme, il suffit maintenant de faire tendre s vers 0. On a :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Delta_s} d\tilde{w} = \int_{\Delta_0} d\tilde{w}$$

où $\Delta_0 = \Delta \cap X(0)$.

On remarque alors que pour tout simplexe σ de K de dimension convenable non inclu dans $X(0)$, $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\sigma \cap \Delta_s} d\tilde{w} = 0$. En effet, si le simplexe σ est non inclu dans $X(0)$ et on aura que la mesure de $\sigma \cap X(0)$ est nulle. Dès lors, $\int_{\sigma \cap \Delta_s} d\tilde{w} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \int_{\sigma \cap \Delta_0} d\tilde{w} = 0$.

Il ne restera alors plus que les simplexes inclus dans $X(0)$.

Or $d\tilde{w} \in \Gamma(X, \Omega_X^{n+1})$ et la partie régulière de $X(0)$ est $X(0) - \{0\}$. Donc :

- Premier cas: $\Delta_0 = \{0\}$ et alors $\int_{\Delta_0} d\tilde{w} = 0$ car on intègre sur un ensemble de mesure nulle.
- Deuxième cas: $\Delta_0 \neq \{0\}$ et alors $\int_{\Delta_0} d\tilde{w} = 0$ car $d\tilde{w}$ est une $(n+1)$ -forme holomorphe et la partie lisse d'un simplexe de Δ_0 est contenue dans une variété complexe de dimension au plus n .

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \text{arg } s = 0}} I(s) = 0$$

□

5. Pour établir le théorème de régularité, il suffit maintenant de démontrer ceci : soit $w \in H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$ et γ défini comme précédemment. Pour $\alpha \leq \arg s \leq \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I(s)$ reste borné pour $s \rightarrow 0$. En fait, on a même

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \alpha \leq \arg s \leq \beta}} I(s) = 0$$

Comme I est combinaison linéaire des I_j à coefficients dans \mathcal{O}_D , il suffit d'établir ce résultat sur les I_j .

On sait que $\tilde{\nabla}$ est une connexion méromorphe d'ordre au plus l . Donc sa matrice est de la forme $\frac{\tilde{C}}{s^l}$ avec \tilde{C} matrice à coefficients holomorphes. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \frac{dI_j}{ds} \right| &= \left| \frac{\tilde{C}_j}{s^l} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_\mu \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \frac{C}{l|s|^l} \sup(|I_1|, \dots, |I_\mu|) \end{aligned}$$

Posons alors $s = re^{i\theta}$. On obtient :

$$\left| \frac{dI_j}{dr} \right| = \left| \frac{dI_j}{ds} \right| \leq \frac{C}{l r^l} \sup(|I_1|, \dots, |I_\mu|)$$

On a également :

$$- \frac{d|I_j|}{dr} \leq \left| \frac{dI_j}{dr} \right|$$

- et on sait que la norme du sup est équivalente à la norme euclidienne.

D'où $\frac{d|I_j|}{dr} \leq \frac{C'}{l r^l} \|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2$. Dès lors,

$$\frac{d\|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2}{dr} \leq \frac{C''}{l r^l} \|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2$$

On fixe $\theta \in [\alpha, \beta]$. En intégrant par rapport à r les deux fonctions lisses et positives, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(\|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2) &\leq \frac{C''}{r^{l-1}} + A \\ \text{i.e. } \ln(\|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2) &\leq \frac{C''}{|s|^{l-1}} + A \end{aligned}$$

$(\|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2 \neq 0$ car au moins l'un des I_j est non nul.) D'où

$$|I_j(t)| \leq \|(|I_1|, \dots, |I_\mu|)\|_2 \leq \alpha e^{\beta|s|^{-(l-1)}}$$

De plus, le lemme 5.6.3 reste vrai modulo une rotation. On peut le voir dans la démonstration de ce lemme. On avait considéré le segment $[0, s_0]$ mais on aurait pu faire le raisonnement avec $[0, z_0]$.

On a maintenant toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de Phragmen-Lindelöf 5.5.6. On en conclut que f est bornée quand $s \rightarrow 0$ sur

tout secteur d'ouverture $< \frac{\pi}{l-1}$. Pour un secteur d'ouverture plus grande, on le décompose en un nombre fini de secteurs d'ouverture convenable et on borne encore f .

On a ainsi démontré que les I_j sont à croissance modérée et par conséquence, toutes les solutions de l'équation $\frac{dI}{ds} = CI$ sont à croissance modérée. Ainsi, la connexion $\tilde{\nabla}$ est régulière.

□

Ce théorème permet de conclure sur le but de ce mémoire:

THEOREME 5.6.7 *La connexion de Gauss Manin sur \underline{GM} est régulière.*

Démonstration

C'est une conséquence directe de la proposition 5.4.1 et du théorème 5.6.1.

□

Chapitre 6

Calcul d'une base du faisceau HDR et de la matrice de monodromie dans cette base.

6.1 L'application de monodromie

La proposition qui suit permettra de donner la matrice de monodromie dans une base particulière de HDR .

On considère s_0 un point base dans D^* . On rappelle que l'on a l'application de monodromie:

$$T : H^n(X(s_0), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X(s_0), \mathbb{C})$$

(c.f. fin du chapitre 2).

PROPOSITION 6.1.1 *La donnée d'un vecteur propre de l'application de monodromie induit une n -forme holomorphe w vérifiant $dw = (m + u)\frac{df}{f} \wedge w$ et tel que $w|_{X(s_0)}$ induit ce vecteur propre. Inversement, la donnée d'une n -forme holomorphe w vérifiant $dw = (m + u)\frac{df}{f} \wedge w$ induit un vecteur propre de la monodromie pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ou éventuellement 0.*

Démonstration

1. Soit e_0 un vecteur propre de T associé à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ($Te_0 = e^{-2i\pi u}e_0$). Notons e_s la section horizontale multiforme de GM qui vaut e_0 en s_0 (il faut passer au revêtement universel de D^* et prolonger de proche en proche via les isomorphismes $\phi_{s_1 s_2} : H^n(X(s_1), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X(s_2), \mathbb{C})$). On considère alors la famille analytique de classes de cohomologie

$$C_s = s^u e_s$$

C_s est une famille uniforme. En effet,

$$\begin{aligned} T(s_0^u e_{s_0}) &= e^{2i\pi u} s_0^u T(e_{s_0}) = e^{2i\pi u} s_0^u e^{-2i\pi u} e_0 \\ &= s_0^u e_{s_0} \end{aligned}$$

D'où $C_s \in \underline{GM}(D^*)$, c'est-à-dire C_s est une section holomorphe du fibré de Gauss-Manin GM .

- Par l'isomorphisme du chapitre 4, elle induit une section sur D^* de HDR que l'on note σ . On va montrer que σ est méromorphe en 0. On considère $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_\mu)$ une base de HDR près de 0. On a alors $\sigma = \sum m_i \epsilon_i$ avec m_i à croissance modérée. En effet, $\tilde{\nabla}$ est régulière et $[e_s]$ horizontale donc les coefficients de $[e_s]$ sont à croissance modérée. Ainsi, les coefficients de σ sont les produits de deux fonctions à croissance modérée, donc ils sont eux-même à croissance modérée. De plus, les m_i sont uniformes car σ et ϵ_i le sont. Dès lors, les m_i sont méromorphes. Ainsi, σ est méromorphe en 0 et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $s^m \sigma \in H^0(D, HDR)$.
- Or, d'après le corollaire 4.5.7, $H^0(D, HDR) \cong H^n(H^0(D, f_*(\Omega_{X/D})))$ et comme X est de Stein, $H^0(X, \Omega_X^n) \rightarrow H^0(X, \Omega_{X/D}^n)$ est surjective. Dès lors, on considère $w \in \Omega^n(X)$ qui représente $s^m \sigma$. On a alors $dw = df \wedge \alpha$ où $\alpha \in \Omega^n(X)$ et pour tout $s \in D^*$, $[w]_{X(s)} = [s^m C_s] = [s^{m+u} e_s]$ dans $H^n(X(s), \mathbb{C})$.
- Par ailleurs, on a: $\tilde{\nabla}[w] = [\alpha]$ et $s \nabla[w]_{X(s)} = (m+u)s^{m+u} e_s$. Comme on a un isomorphisme de connexion, on en déduit que $s\alpha$ et $(m+u)w$ induisent la même classe de cohomologie dans $H^n(X(s), \mathbb{C})$ pour tout $s \in D^*$. Dès lors, $s\alpha$ et $(m+u)w$ induisent les mêmes classes dans $H^0(D, HDR)$ car HDR est libre et on en déduit donc que $f\alpha = (m+u)w + df \wedge \beta + d\gamma$ (égalité entre formes holomorphes).
- Dès lors, $f df \wedge \alpha = (m+u)df \wedge w + df \wedge d\gamma$ ou encore

$$dw = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w + \frac{df}{f} \wedge d\gamma$$

qu'on écrit aussi:

$$d(w + \frac{df}{f} \wedge \gamma) = (m+u) \frac{df}{f} \wedge (w + \frac{df}{f} \wedge \gamma)$$

- Or si $d\Gamma = \lambda \frac{df}{f} \wedge \Gamma$, on a $d(f^p \Gamma) = (\lambda + p) \frac{df}{f} \wedge \Gamma$. Ainsi, en partant d'un vecteur propre e_0 de T de valeur propre $e^{2i\pi u}$, on peut trouver $w' \in \Omega^n(X)$ vérifiant $dw' = (m'+u) \frac{df}{f} \wedge w'$ et $w'_{X(s_0)}$ induisant e_0 dans $H^n(X(s_0), \mathbb{C})$. On peut prendre par exemple $m' = m+1$ ($w' = fw + df \wedge \gamma$).
2. Réciproquement, considérons $w \in \Omega^n(X)$ telle que $dw = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w$. Alors $d(\frac{w}{f^{m+u}}) = \frac{dw}{f^{m+u}} - (m+u) \frac{w \wedge df}{f^{m+u+1}} = 0$ (en particulier, $\frac{w}{f^{m+u}}$ est une section horizontale de $(HDR, \tilde{\nabla})$). Ainsi, la section multiforme sur D^* définie par $\frac{w}{f^{m+u}}$ induit un vecteur propre de la monodromie via la restriction à $X(s_0)$ pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ou 0.

□

REMARQUE 6.1.2 Dans l'exemple des polynômes quasi-homogènes, on construit une base de HDR dont chaque élément vérifie l'égalité $dw = \lambda \frac{df}{f} \wedge w$. On pourra alors donner la matrice de monodromie dans une base particulière grâce à cette proposition.

6.2 Construction d'une base du faisceau HDR dans le cas quasi-homogène.

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques résultats pour construire une base d'un faisceau HDR dans le cas quasi-homogène. Dans un premier temps donnons quelques définitions et résultats sur les polynômes quasi-homogènes.

DEFINITION 6.2.1 Soit r_0, \dots, r_n des nombres rationnels strictement positifs. Un polynôme $f(z_0, \dots, z_n)$ est dit quasi-homogène de type (r_0, \dots, r_n) s'il s'exprime comme combinaison linéaire de monôme $z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}$ pour lesquels on a : $\frac{i_0}{r_0} + \dots + \frac{i_n}{r_n} = 1$.

DEFINITION 6.2.2 Une fonction holomorphe f est dite équivalente à un polynôme quasi-homogène s'il existe une transformation holomorphe des coordonnées qui rend f quasi-homogène.

La proposition suivante, démontrée par K. Saito dans [10], donne un critère pour savoir si une fonction holomorphe est équivalente à un polynôme quasi-homogène.

PROPOSITION 6.2.3 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction holomorphe avec une singularité isolée soit équivalente à un polynôme quasi-homogène est que f appartienne à son idéal jacobien $J(f)$.

REMARQUE 6.2.4 Si f est un polynôme quasi-homogène alors $f \in J(f)$.

Démonstration

En effet, posons $f = \sum_k z_0^{i_0^k} \dots z_n^{i_n^k}$. Alors

$$f_{z_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j} = \sum_k i_j^k z_0^{i_0^k} \dots z_j^{i_j^k - 1} \dots z_n^{i_n^k}$$

et $f = \frac{z_0 f_{z_0}}{r_0} + \dots + \frac{z_n f_{z_n}}{r_n} \in J(f)$ d'après la définition d'un polynôme quasi-homogène.

□

Maintenant, on considère un représentant de Milnor $f : X \rightarrow D$. On suppose que f admet un point critique isolé à l'origine et que f est un polynôme quasi-homogène.

On sait que $\frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{J(f)}$ est un espace vectoriel de dimension μ . Soit m_1, \dots, m_μ une base de ce quotient. On va démontrer:

THEOREME 6.2.5 Il existe $[w_1], \dots, [w_\mu]$ base de HDR telle que:

- $dw_j = m_j dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$.
- $f w_j \in Z^n(\Omega_{X/D})$.
- $\tilde{\nabla}[f w_j] = [\lambda_j w_j]$ avec $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$.

On notera $H = H^p(\Omega_{X/D})$ et $'H = H^p(' \Omega_{X/D})$ où $' \Omega_{X/D}$ est le complexe de faisceau $\Omega_{X/D}$ dans lequel on a remplacé $\Omega_{X/D,0}^{n+1}$ par 0. Pour la démonstration, on va utiliser les lemmes suivants:

LEMME 6.2.6 1. $d : \frac{'H}{H} \rightarrow \Omega_{X/D}^{n+1}$ est bijective.

2. $\tilde{\nabla} : H \rightarrow 'H$ est bijective.

Démonstration

1. Cette bijection à été montrée dans la preuve du théorème 5.3.5 page 55.

2. On a démontré ce point dans la preuve du théorème 5.3.5 page 55.

Rappel:

- $\tilde{\nabla}$ est injective car si $dw = df \wedge \alpha$ avec $\alpha = 0$ dans $'H$ alors $\alpha = d\beta + df \wedge \gamma$. Dès lors, $dw = df \wedge d\beta = -d(df \wedge \beta)$. D'où $d(w + df \wedge \beta) = 0$. On en déduit alors que localement sur $X \setminus f^{-1}(0)$, on a $w = -df \wedge \gamma + d\delta$ c'est-à-dire $[w] = 0$ dans HDR car il est libre, donc dans $'H$.
- Pour la surjectivité, on considère $\alpha \in \Omega_X^n$. $df \wedge \alpha$ est fermée car de degré maximum. Il existe donc localement $w \in \Omega_X^n$ tel que $df \wedge \alpha = dw$ et w vérifie la condition de cocycle. D'où la surjectivité.

□

LEMME 6.2.7

$\tilde{\nabla} : \frac{H}{fH} \rightarrow \frac{'H}{f'H}$ est bijective.

Démonstration

Pour démontrer ce lemme, il suffit de montrer que l'application $\tilde{\nabla}$ passe au quotient. En effet, le premier point donne la surjectivité de l'application et comme $\frac{H}{fH}$ et $\frac{'H}{f'H}$ sont de même dimension (μ), on a la bijectivité.

Montrons que l'application passe au quotient: il faut montrer que $\tilde{\nabla}(fH) \subset H$. On a $\tilde{\nabla}(fw) = w + f\tilde{\nabla}(w)$. Donc $\tilde{\nabla}(fH) \subset H + f\tilde{\nabla}(H)$. Or f est quasi-homogène donc $f\tilde{\nabla}(H) \subset H$. En effet, on montre que $f'H \subset H$. Soit $w \in \Omega_X^n$ et montrons que $fw \in Z^n(\Omega_{X/D})$.

$$\begin{aligned} d(f\alpha) &= df \wedge \alpha + f d\alpha \\ &= df \wedge \alpha + \left(\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \text{ car } f \in J(f) \\ &= df \wedge \alpha + df \wedge \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $f'H \subset H$ et alors, $\tilde{\nabla}(fH) \subset H$

□

Démonstration

Démontrons maintenant le théorème 6.2.5.

- On considère une base m_1, \dots, m_μ de $\frac{\mathcal{O}}{J(f)}$ où les m_j sont des monômes. Alors $m_1 dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n, \dots, m_\mu dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$ est une base de $\Omega_{X/D}^{n+1}$. Par le lemme 6.2.6 1, il existe $w_j \in \Omega_X^n$ tel que $dw_j = m_j dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$ et les $\overline{w_j}$ forment une base dans $\frac{H}{fH}$.
- On a alors fw_j est $d_{X/D}$ -fermée car $f'H \subset H$.
- Il faut maintenant montrer que $fw_j \in Z^n(\Omega_{X/D})$ et que $\tilde{\nabla}[fw_j] = [\lambda_j w_j]$. Pour cela, on rappelle que $f = \sum_{k=0}^n \alpha_k z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}$ et on va considérer

$$w_j = C'_j \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\alpha_k} z_k m_j dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_k} \wedge \dots \wedge dz_n$$

Montrons que w_j satisfait au trois hypothèses.

- $dw_j = C'_j \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha_k} (m_j + z_k \frac{\partial m_j}{\partial z_k}) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \right)$ avec C'_j à déterminer et comme les m_j sont des monômes, $z_k \frac{\partial m_j}{\partial z_k} = C_{kj} m_j$ avec $C_k \geq 0$. Dès lors, $dw_j = C'_j \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha_k} (1 + C_{kj}) \right) m_j dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$. Ainsi, en posant

$$C'_j = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1 + C_{kj}}{\alpha_k} \right)^{-1}$$

on a le premier point ($C'_j \neq 0$ car $C_{kj} \geq 0$ et α_k non tous nuls).

- On a défini w_j de sorte qu'il vérifie le deuxième point. En effet,

$$\begin{aligned} d(fw_j) &= df \wedge w_j + f dw_j \\ &= df \wedge w_j + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha_k} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k} m_j dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= df \wedge w_j + df \wedge \frac{w_j}{C'_j} \\ &= df \wedge \left(1 + \frac{1}{C'_j}\right) w_j \end{aligned}$$

Dès lors fw_j est $d_{X/D}$ -fermée et $\tilde{\nabla}(fw_j) = \left(1 + \frac{1}{C'_j}\right) w_j$. On remarque que les valeurs propres de $\tilde{\nabla}f$ sont $1 + \frac{1}{C'_j}$. Ainsi, comme $f\tilde{\nabla}(w_j) = \tilde{\nabla}(fw_j) - w_j$, $f\tilde{\nabla}$ a pour valeurs propres $\frac{1}{C'_j} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (1 + C_{kj})$.

- Il reste donc à montrer qu'ils forment une base de HDR . Pour cela, on constate que grâce à la bijectivité des deux dernières applications du lemme, les $\overline{w_j}$ forment une base de $\frac{H}{fH}$. Il faut montrer que les $[w_j]$ forment une base de H .
 - Montrons que $\{[w_j]\}$ est une famille libre dans HDR . Raisonnons par l'absurde. Supposons $\sum a_j(s)[w_j] = 0$ et que l'un au moins des a_j est non nul. On note alors m la plus petite valuation des a_j . Alors

$\sum a_j(s)[w_j] = t^m \sum b_j(s)[w_j]$ et $\sum a_j(s)[w_j] = 0 \Rightarrow \sum b_j(0)[w_j] = 0$ et en passant au quotient dans $\frac{H}{fH}$, on obtient $b_j(0) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, \mu$. Contradiction car l'un au moins est non nul.

- Montrons maintenant que $\{[w_j]\}$ est une famille génératrice. On sait que les $\overline{w_j}$ forment une base de $\frac{H}{fH} \cong \frac{HDR}{sHDR}$ donc $HDR = \sum \mathcal{O}[w_j] + sHDR$. On rappelle:

COROLLAIRE 6.2.8 (Corollaire du lemme de Nakayama) *Soit M un A -module de type fini et N un sous module de M . Soit $I \subset R(A)$. Alors $M = N + IM \Rightarrow M = N$.*

Or HDR est de type fini, $(s) = R(\mathcal{O})$ et $HDR = \sum \mathcal{O}[w_j] + sHDR$.
Dès lors, $HDR = \sum \mathcal{O}[w_j]$.

Il s'agit donc bien d'une base de HDR .

□

REMARQUE 6.2.9 *On constate que les w_j vérifie $dw_j = \lambda_j \frac{df}{f} \wedge w_j$ avec $\lambda_j = \frac{1}{c_j}$. On peut donc leur appliquer la proposition 6.1.1 et ainsi calculer l'application de monodromie dans une base de sections multiformes de HDR . En effet, d'après la proposition 6.1.1, w_j induit un vecteur propre de T pour la valeur propre $e^{-2i\pi\lambda_j}$.*

6.3 Calcul d'une base du faisceau HDR dans le cas où $f = \sum_j z_j^{i_j}$.

Il s'agit d'un cas particulier de polynôme quasi-homogène de type (i_0, \dots, i_n) . On est toujours dans le cas où f admet un point critique isolé.

1. Calcul d'une base de $\frac{\mathcal{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{J(f)}$.
On a $J(f) = (z_0^{i_0-1}, \dots, z_n^{i_n-1})$. D'où $\frac{\mathcal{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{J(f)}$ a pour base: $\{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n}\}_{0 \leq \alpha_j \leq i_j-2}$.
Le nombre de Milnor vaut donc: $(i_0 - 1) \dots (i_n - 1)$.
2. Cherchons maintenant les formes différentielles w telle que $\widehat{\nabla}w = \alpha w$. On rappelle que si on pose $\xi = \frac{z_0}{i_0} \frac{\partial}{\partial z_0} + \dots + \frac{z_n}{i_n} \frac{\partial}{\partial z_n}$, on a $f = \xi(f)$. On considère alors $w = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{z_j}{i_j} dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \dots \wedge dz_n$ (c.f. démonstration du théorème 6.2.5).

(a) $dw = (\frac{1}{i_0} + \dots + \frac{1}{i_n}) \frac{df}{f} \wedge w$. En effet:

$$\begin{aligned} df \wedge w &= \left(\frac{z_0}{i_0} \frac{\partial f}{\partial z_0} + \dots + \frac{z_n}{i_n} \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= f dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ \text{et } dw &= \left(\frac{1}{i_0} + \dots + \frac{1}{i_n} \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

- (b) De même, $d(z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w) = (\frac{\alpha_0+1}{i_0} + \dots + \frac{\alpha_n+1}{i_n}) \frac{df}{f} \wedge (z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w)$.
En effet:

$$\begin{aligned} d(z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w) &= \alpha_0 z_0^{\alpha_0-1} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} dz_0 \wedge w + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_n z_0^{\alpha_0} \dots z_{n-1}^{\alpha_{n-1}} z_n^{\alpha_n-1} dz_n \wedge w + z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} dw \\ &= \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j}{i_j} \right) z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n + \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{i_j} \right) z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j + 1}{i_j} \right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } df \wedge z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w &= z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} (\xi(f)) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} f dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

3. Ainsi, d'après le théorème 6.2.5, la famille $z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w$ est une base uniforme de HDR .
4. Montrons maintenant que

$$\frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}$$

est une base de sections horizontales multiformes de $(HDR, \widehat{\nabla})$.

- $z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w \in H^0(D, HDR)$ donc $\frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}$ est une section multiforme de HDR .
- Il s'agit d'une base car la famille des $z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w$ est une base de HDR .
- On a:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)} \right) &= - \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j + 1}{i_j} \right) \frac{df}{f \left(1 + \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)} \wedge z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w + \frac{d(z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w)}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)} \\ &= - \frac{\left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}{f} df \wedge \frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)} + \frac{\left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}{f} df \wedge \frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, cette famille est une base de sections horizontales multiformes de HDR .

- De plus, d'après la proposition 6.1.1, la matrice de l'application de monodromie dans une telle base est la matrice diagonale dont la valeur propre associée au vecteur propre $\frac{z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n} w}{f \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}$ est $e^{-2i\pi \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha_j+1}{i_j} \right)}$.

6.4 Calcul d'une base d'un faisceau HDR dans un cas non quasi-homogène.

On considère le polynôme $f = x^6 + y^4 + x^2y^2$. Dans ce cas, f n'est pas quasi-homogène et on ne peut donc pas appliquer le théorème 6.2.5. Pour calculer la matrice de $\tilde{\nabla}$ pour un tel f , on va introduire deux nouveaux espaces $'\widetilde{H}$ et $''\widetilde{H}$.

DEFINITION 6.4.1 $'\widetilde{H}$ et $''\widetilde{H}$ sont les saturés par $f\tilde{\nabla}$ de $'H$ et de $''H$ respectivement. Ces espaces sont des \mathcal{O}_D -modules.

On a alors le résultat suivant:

LEMME 6.4.2 1. $f\tilde{\nabla} : '\widetilde{H} \rightarrow ''\widetilde{H}$ est bijective.

2. $\tilde{\nabla} : '\widetilde{H} \rightarrow ''\widetilde{H}$ est surjective.

3. $f''\widetilde{H} = '\widetilde{H}$.

La démonstration de ce lemme est donné par J. Scherk dans [11] et par B. Malgrange dans [2].

Démonstration

1. Montrons que $f\tilde{\nabla} : '\widetilde{H} \rightarrow ''\widetilde{H}$ est bijective. On rappelle tout d'abord quelques notations que l'on a utilisées dans la démonstration de la régularité. On a appelé γ une famille de classes d'homologie localement constante, c'est-à-dire tel que $\gamma(s) \in H_n(X(\pi(s)), \mathbb{C})$ dépende continûment de s . On définit alors $I(t) = \int_{\gamma(t)} w$ et on a montré que I était holomorphe, que $\frac{dI}{dt}(t) = \int_{\gamma(t)} \tilde{\nabla}(w)(*)$ et qu'elle est solution d'un système d'équations différentielles régulier.

- Montrons maintenant l'injectivité. Soit $w \in '\widetilde{H}$ alors, $w = \sum (f\tilde{\nabla})^k w_k$ avec $w_k \in 'H$ ou encore $\frac{w}{df} = \sum (f\tilde{\nabla})^k (\frac{w_k}{df})$ par la définition de $'H$ dans $''H$ (c.f. lemme 5.3.11). On sait que $\int_{\gamma(t)} \frac{w_k}{df} = \sum c_{\alpha,q}^k t^\alpha (\log t)^q$ car elle vérifie un système d'équations différentielles régulier et on a $C_{\alpha,q}^k \neq 0 \Rightarrow \alpha > 0$, conséquence du lemme 5.6.2 ($\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \text{arg } t = 0}} \int_{\gamma(t)} \frac{w_k}{df} = 0$). Donc $\frac{w}{df} = \sum c_{\alpha,q} t^\alpha (\log t)^q$ en utilisant (*) et $c_{\alpha,q} \neq 0 \Rightarrow \alpha > 0$ car si $c_{\alpha,q} \neq 0$ alors il existe un k tel que $c_{\alpha,q}^k \neq 0$ et alors $\alpha > 0$. Supposons maintenant $f\tilde{\nabla}(w) = 0$. On a alors $\tilde{\nabla}(w) = 0$ et pour tout γ , on a $\int_{\gamma(t)} \frac{w}{df} = \text{cste}$ par (*) et d'après la condition sur les $c_{\alpha,q}$, l'intégrale est nulle. De plus, on a le résultat sur toutes les familles γ , donc $\frac{w}{df} = 0$ et $w = 0$. Dès lors, $w = 0$ et on a l'injectivité.
- Montrons maintenant la surjectivité. On va utiliser les indices. On a $\chi(f\tilde{\nabla}) = \chi(\tilde{\nabla}) + \chi(f)$. Or $\chi(f) = 0, \chi(\tilde{\nabla}) = 0$ et $\ker f\tilde{\nabla} = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi, $\dim \text{coker } f\tilde{\nabla} = 0$ et $f\tilde{\nabla}$ est surjective.

2. Pour montrer la surjection de $\tilde{\nabla} : '\widetilde{H} \rightarrow ''\widetilde{H}$, on va commencer par montrer que $\tilde{\nabla} : 'H \rightarrow ''H$ est bijective.

- injectivité: Soit $df \wedge \alpha \in 'H$ tel que $\tilde{\nabla}(df \wedge \alpha) = [0]$, i.e. $d\alpha = df \wedge d\beta$ avec $\beta \in \Omega_X^{n-1}$. Alors, $d(\alpha + df \wedge \beta) = 0$ et ainsi, il existe γ tel

que $\alpha + df \wedge \beta = d\gamma$ (lemme de Poincaré). Dès lors, $[\alpha] = 0$ dans $\frac{\Omega_X^n}{df \wedge \Omega_X^n + d\Omega_X^{n-1}}$, i.e. $[df \wedge \alpha] = 0$ dans $'H$.

- surjectivité: Soit $\beta \in \Omega_X^{n+1}$. β est fermé car de degré maximum. Il existe donc localement $\alpha \in \Omega_X^n$ tel que $\beta = d\alpha$ (lemme de Poincaré). Alors, $df \wedge \alpha \in 'H$ et $\tilde{\nabla}(df \wedge \alpha) = d\alpha = \beta$.

Dès lors, $\tilde{\nabla} : 'H \rightarrow ''H$ est bijective.

Soit maintenant $w = \sum (f\tilde{\nabla})^k w_k \in \widetilde{''H}$, $w_k \in ''H$. D'après ce qui précède, il existe $\beta_k \in 'H$ tel que $\tilde{\nabla}(\beta_k) = w_k$. En utilisant $f\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla} - id$, on obtient $\sum (f\tilde{\nabla})^k (\tilde{\nabla}\beta_k) \in \widetilde{'H}$. D'où la surjectivité de $\tilde{\nabla} : \widetilde{'H} \rightarrow \widetilde{''H}$.

3.

$$\begin{aligned} \widetilde{'H} &= f\tilde{\nabla}(\widetilde{'H}) \text{ car } f\tilde{\nabla} : \widetilde{'H} \rightarrow \widetilde{'H} \text{ est bijective.} \\ &= f''\widetilde{H} \quad \text{car } \tilde{\nabla} : \widetilde{'H} \rightarrow \widetilde{''H} \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

□

Ainsi, pour trouver une base de $\widetilde{''H}$, il suffit de trouver un sous ensemble de $\widetilde{''H}$ qui représente une base de $\frac{''\widetilde{H}}{f''\widetilde{H}} = \frac{''\widetilde{H}}{'\widetilde{H}}$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel (on utilise le lemme de Nakayama).

REMARQUE 6.4.3 *Le résidu de $\tilde{\nabla}$ est $f\tilde{\nabla}$ vu comme endomorphisme de $\frac{''\widetilde{H}}{f''\widetilde{H}}$. On calculera $\tilde{\nabla}f$ (plus facile car on a la formule de Brieskorn 6.4.5) et comme $f\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}f - id$, on aura la matrice de $f\tilde{\nabla}$.*

1. Calcul d'une base de $\frac{''\widetilde{H}}{'\widetilde{H}}$:

$$\text{On a } \begin{cases} f_x = 6x^5 + 2xy^2 \\ f_y = 4y^3 + 2x^2y \end{cases}$$

De plus, x^3y et xy^3 sont dans $J(f)$. En effet, on a $f = \frac{x}{6}f_x + \frac{y}{4}f_y + \frac{1}{6}x^2y^2$ et:

$$\begin{aligned} x^2y &= \frac{1}{2}f_y - 2y^3 \\ \text{d'où } x^3y &= \frac{x}{2}f_y - 2xy^3 \\ &= \frac{x}{2}f_y - 2y\left(\frac{1}{2}f_x - 3x^5\right) \\ &= \frac{x}{2}f_y - yf_x + 6x^5y \\ \text{d'où } x^3y(1 - 6x^2) &= \frac{x}{2}f_y - yf_x \end{aligned}$$

ce qui montre que $x^3y \in J(f)$ car $(1 - 6x^2)$ est inversible près de 0. De même, $xy^3(1 - 6x^2) = \frac{y}{2}f_x - \frac{3x^3}{2}f_y$.

Dès lors, le quotient $\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{J(f)}$ admet pour base: $1, x, \dots, x^5, y, \dots, y^3, xy, f$. Le nombre de Milnor vaut donc 11. Posons $w = dx \wedge dy$. Alors, $w, xw, \dots, x^5w, yw, \dots, y^3w, xyw, fw$ forment une base de $\frac{''\widetilde{H}}{'\widetilde{H}}$ (c.f. lemme 5.3.13).

REMARQUE 6.4.4 *On a un résultat analogue pour les polynômes du type $f = x^a + y^b + x^2y^2$ avec a et b supérieurs ou égaux à 4 et non égaux à 4*

en même temps. Dans ce cas une base de $\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{J(f)}$ est $1, x, \dots, x^{a-1}, y, \dots, y^{b-1}, xy, f$ et le nombre de Milnor vaut $a + b + 1$.

2. Donnons les expressions de xf , yf , et f^2 en fonction de f_x , f_y .

$$- \quad xf = \frac{x^2}{6}f_x + \frac{xy}{4}f_y + \frac{y}{6}x^3y$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (1 - 6x^2)xf &= \left(\frac{x^2}{6} - x^4\right)f_x + \left(\frac{xy}{4} - \frac{3}{2}x^3y\right)f_y + \frac{xy}{12}f_y - \frac{y^2}{6}f_x \\ &= \left(\frac{x^2}{6} - x^4 - \frac{y^2}{6}\right)f_x + \left(\frac{xy}{3} - \frac{3}{2}x^3y\right)f_y \end{aligned}$$

$$- \quad yf = \frac{xy}{6}f_x + \frac{y^2}{4}f_y + \frac{x}{6}x^2y$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (1 - 6x^2)yf &= \left(\frac{xy}{6} - x^3y\right)f_x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2\right)f_y + \frac{xy}{12}f_x - \frac{1}{4}x^4f_y \\ &= \left(\frac{xy}{4} - x^3y\right)f_x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4}\right)f_y \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} (1 - 6x^2)f^2 &= (1 - 6x^2)\left(\frac{x}{6}ff_x + \frac{y}{4}ff_y\right) + \frac{1}{6}x^2y(1 - 6x^2)yf \\ &= \left(\frac{x}{6}f - x^3f\right)f_x + \left(\frac{y}{4}f - \frac{3}{2}x^2yf\right)f_y + \frac{x^2y}{6}\left(\left(\frac{xy}{4} - x^3y\right)f_x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^4}{4}\right)f_y\right) \\ &= \left(\frac{x}{6}f - x^3f + \frac{x^3y^2}{24} - \frac{x^5y^2}{6}\right)f_x + \left(\frac{y}{4}f - \frac{3}{2}x^2yf + \frac{x^2y^3}{24} - \frac{1}{4}x^4y^3 - \frac{1}{24}x^6y\right)f_y \end{aligned}$$

3. Maintenant, on va calculer une base de $\frac{\widetilde{H}}{H}$ ainsi que la matrice de $\widehat{\nabla}f$ dans cette base. On donne tout d'abord la formule de Brieskorn :

LEMME 6.4.5 (Formule de Brieskorn) Soit $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$. On a $\widehat{\nabla}((Af_x + Bf_y)w) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)w$, où $w = dx \wedge dy$.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $(Af_x + Bf_y)w = df \wedge (Ady - Bdx)$. D'où

$$\widehat{\nabla}((Af_x + Bf_y)w) = d(Ady - Bdx) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)w$$

□

Calculons maintenant la valeur de $\widehat{\nabla}f$ évalué sur $x^i y^j w$. D'après le calcul de xf , on a :

$$(1 - 6x^2)x^{i+1}y^j f = \left(\frac{x^{i+2}y^j}{6} - x^{i+4}y^j - \frac{x^i y^{j+2}}{6}\right)f_x + \left(\frac{x^{i+1}y^{j+1}}{3} - \frac{3}{2}x^{i+3}y^{j+1}\right)f_y$$

et d'après celui de yf , on a :

$$(1 - 6x^2)x^i y^{j+1} f = \left(\frac{x^{i+1}y^{j+1}}{4} - x^{i+3}y^{j+1}\right)f_x + \left(\frac{x^i y^{j+2}}{4} - \frac{3}{2}x^{i+2}y^{j+2} - \frac{x^{i+4}y^j}{4}\right)f_y$$

Ainsi, en appliquant la formule de Brieskorn, on obtient:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}(fxw) &= \left(\frac{x}{3} - 4x^3 + \frac{x}{3} - \frac{3}{2}x^3 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^3w) \\
&= \left(\frac{2}{3}x - \frac{11}{2}x^3 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^3w) \\
\tilde{\nabla}(fyw) &= \left(\frac{y}{4} - 3x^2y + \frac{y}{2} - 3x^2y \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^2yw) \\
&= \left(\frac{3}{4}y - 6x^2y \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^2yw) \\
\tilde{\nabla}(fx^2w) &= \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \left(5 + \frac{3}{2} \right)x^4 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^4w) \\
&= \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}y^2 - \frac{13}{2}x^4 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^4w) \\
\tilde{\nabla}(fx^3w) &= \left(\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)x^3 - \frac{1}{3}xy^2 - \left(6 + \frac{3}{2} \right)x^5 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^5w) \\
&= \left(x^3 - \frac{xy^2}{3} - \frac{15}{2}x^5 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^5w) \\
\tilde{\nabla}(fx^4w) &= \left(\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3} \right)x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \left(7 + \frac{3}{2} \right)x^6 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^6w) \\
&= \left(\frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{17}{2}x^6 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^6w) \\
\tilde{\nabla}(fx^5w) &= \left(\left(1 + \frac{1}{3} \right)x^5 - \frac{2}{3}x^3y^2 - \left(8 + \frac{3}{2} \right)x^7 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^7w) \\
&= \left(\frac{4}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^3y^2 - \frac{19}{2}x^7 \right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^7w)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\nabla}(fy^2w) = \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) y^2 - \left(3 + \frac{9}{2} \right) x^2 y^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^2y^2w)$$

$$= \left(y^2 - \frac{15}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^2y^2w)$$

$$\tilde{\nabla}(fy^3w) = \left(\left(\frac{1}{4} + 1 \right) y^3 - 9x^2y^3 - \frac{1}{2}x^4y \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^2y^3w)$$

$$= \left(\frac{5}{4}y^3 - 9x^2y^3 - \frac{x^4y}{2} \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^2y^3w)$$

$$\tilde{\nabla}(fxyw) = \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) xy - 7x^3y \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^3yw)$$

$$= \left(xy - 7x^3y \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^3yw)$$

$$\tilde{\nabla}(f^2w) = \left(\frac{f}{6} + \frac{x}{6}f_x - 3x^2f - x^3f_x + \frac{x^2y^2}{8} - \frac{5}{6}x^4y^2 \right.$$

$$\left. + \frac{f}{4} + \frac{y}{4}f_y - \frac{3}{2}x^2f - \frac{3}{2}x^2yf_y + \frac{x^2y^2}{8} - \frac{3}{4}x^4y^2 - \frac{x^6}{24} \right) w + 6\tilde{\nabla}(f^2x^2w)$$

$$= \left(\left(\frac{5}{12} - \frac{9x^2}{2} \right) f + \left(\frac{x}{6} - x^3 \right) f_x + \left(\frac{y}{4} - \frac{3x^2y}{2} \right) f_y + \frac{x^2y^2}{4} - \frac{19}{12}x^4y^2 - \frac{x^6}{24} \right) w + 6\tilde{\nabla}(f^2x^2w)$$

$$\text{or } 6\tilde{\nabla}(fx^2w) = 6\tilde{\nabla}\left(f\left(\frac{x^3}{6}f_x + \frac{x^2y}{4}f_y + \frac{x^4y^2}{6}\right)w\right)$$

$$= \left(3x^2f + x^3f_x + \frac{3}{2}fx^2 + \frac{3}{2}x^2yf_y \right) w + \tilde{\nabla}(fx^4y^2w)$$

$$\text{d'où } \tilde{\nabla}(f^2w) = \left(\frac{5}{12}f + \frac{x}{6}f_x + \frac{y}{4}f_y + \frac{x^2y^2}{4} - \frac{19}{12}x^4y^2 - \frac{x^6}{24} \right) w + \tilde{\nabla}(fx^4y^2w)$$

Dès lors, en utilisant ces calculs et les expressions de x^2y^2 en fonction de f et de ses dérivées partielles, on obtient:

$$\tilde{\nabla}(fxw) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{x^3}{2} - 2xy^3 + 3x^5 - 24x^3y^2 - 342x^7 \right) w + 216\tilde{\nabla}(fx^7w)$$

$$\tilde{\nabla}(fyw) = \left(\frac{3}{4}y - 3y^3 + 108x^2y^3 + 6x^4y \right) w - 72\tilde{\nabla}(fx^2y^3w)$$

$$\tilde{\nabla}(fx^2w) = \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{y^2}{6} + \frac{x^4}{2} - 18f + 3xf_x + \frac{9}{2}yf_y - 51x^6 \right) w + 36\tilde{\nabla}(fx^6w)$$

$$\tilde{\nabla}(fx^3w) = \left(x^3 - \frac{fx}{6} + \frac{3x^5}{2} - 4x^3y^2 - 57x^7 \right) w + 36\tilde{\nabla}(fx^7w)$$

$$\tilde{\nabla}(fx^4w) = \left(\frac{7}{6}x^4 - 3f + \frac{x}{2}f_x + \frac{3}{4}yf_y - \frac{17}{2}x^6 \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^6w)$$

$$\tilde{\nabla}(fx^5w) = \left(\frac{4}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^3y^2 - \frac{19}{2}x^7 \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^7w)$$

$$\tilde{\nabla}(fy^2w) = \left(y^2 + 9f - \frac{3x}{2}f_x - \frac{9}{4}yf_y - \frac{x^4}{4} - 57x^4y^2 - \frac{3}{2}x^6 \right) w + 36\tilde{\nabla}(fx^4y^2w)$$

$$\tilde{\nabla}(fy^3w) = \left(\frac{5}{4}y^3 - 9x^2y^3 - \frac{x^4y}{2} \right) w + 6\tilde{\nabla}(fx^2y^3w)$$

$$\tilde{\nabla}(fxyw) = \left(xy - 7x^3y\right)w + 6\tilde{\nabla}(fx^3yw)$$

Calculons maintenant $(\tilde{\nabla}f)^2(w)$. Pour cela, on remarque tout d'abord que $(\tilde{\nabla}f)^2(w) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}f^2w) - \tilde{\nabla}(fw)$ ce qui permet de ne calculer que $\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}f^2w)$.

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}f^2w) &= \frac{5}{12}\tilde{\nabla}(fw) + \frac{w}{6} + \frac{w}{4} + \tilde{\nabla}\left(\frac{x^2y^2}{4}w\right) - \frac{19}{12}\tilde{\nabla}(x^4y^2w) - \tilde{\nabla}\left(\frac{x^6}{24}w\right) + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}(fx^4y^2w)) \\ &= \frac{5}{12}\tilde{\nabla}(fw) + \frac{5w}{12} + \frac{1}{4}\tilde{\nabla}((6f - xf_x - \frac{3}{2}yf_y)w) - \frac{19}{12}\tilde{\nabla}(x^4y^2w) - \tilde{\nabla}\left(\frac{x^6}{24}w\right) + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}(fx^4y^2w)) \\ &= \frac{5}{12}\tilde{\nabla}(fw) + \frac{5w}{12} + \frac{3}{2}\tilde{\nabla}(fw) - \frac{w}{4} - \frac{3}{8}w - \frac{19}{12}\tilde{\nabla}(x^4y^2w) - \tilde{\nabla}\left(\frac{x^6}{24}w\right) + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}(fx^4y^2w)) \\ &= \frac{23}{12}\tilde{\nabla}(fw) - \frac{5}{24}w - \tilde{\nabla}\left(\frac{x^6}{24}w\right) - \frac{19}{12}\tilde{\nabla}(x^4y^2w) + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}(fx^4y^2w))\end{aligned}$$

et comme $(\tilde{\nabla}f)^2(w) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}f^2w) - \tilde{\nabla}(fw)$, on a :

$$(\tilde{\nabla}f)^2w = \frac{11}{12}\tilde{\nabla}(fw) - \frac{5}{24}w - \tilde{\nabla}\left(\frac{x^6}{24}w\right) - \frac{19}{12}\tilde{\nabla}(x^4y^2w) + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}(fx^4y^2w))$$

4. Conclusions:

- Le calcul de $(\tilde{\nabla}f)^2w$ montre que l'on a ${}''\tilde{H} = (\tilde{\nabla}f)''H + {}'H$. En effet, une des inclusions est évidente. Pour la deuxième, il suffit de remarquer que $(\tilde{\nabla}f)(gw) = \tilde{\nabla}(fgw) = dg \wedge \frac{fw}{df} + g\tilde{\nabla}(fw)$ et ainsi, par l'expression de $(\tilde{\nabla}f)^2w$, on a la deuxième inclusion.

REMARQUE 6.4.6 Ici, on a pas l'identité de Leibniz car la fonction g est définie sur X et $\tilde{\nabla}$ est une connexion sur D .

- Il faut maintenant montrer que ${}'\tilde{H} = f''H + {}'H$.
On remarque tout d'abord que $(\tilde{\nabla}f)'(H) \subset {}'H + f''H$. En effet, $(\tilde{\nabla}f)(df \wedge \alpha) = d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha \in {}'H + f''H$.
De plus, $(\tilde{\nabla}f)^2(df \wedge \alpha) = \tilde{\nabla}f(df \wedge \alpha + fd\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha + (\tilde{\nabla}f^2)(d\alpha)$.
Pour démontrer la première inclusion, il suffit de démontrer que $(\tilde{\nabla}f^2)(d\alpha)$ est dans ${}'H + f''H$. Or $(\tilde{\nabla}f^2)(gw) = dg \wedge \frac{f^2w}{df} + g\tilde{\nabla}(f^2w)$ et en regardant l'expression de $\tilde{\nabla}(f^2w)$, on voit qu'il appartient à $f''H + {}'H + (\tilde{\nabla}f)'(H)$. Or, d'après ce qui précède, $(\tilde{\nabla}f)'(H) \subset {}'H + f''H$. Ainsi, $g\tilde{\nabla}(f^2w)$ est dans ${}'H + f''H$. Pour le premier terme, on rappelle que $f^2w = (Af_x + Bf_y)w = df \wedge (Ady - Bdx)$. Dès lors, $dg \wedge \frac{f^2w}{df} = dg \wedge Ady - dg \wedge Bdx$ et si on regarde l'expression de A et de B , on voit que $dg \wedge Ady$ et $dg \wedge Bdx$ sont dans ${}'H + f''H$. D'où ${}'\tilde{H} \subset f''H + {}'H$, en réitérant le raisonnement.
Pour la deuxième inclusion, il suffit de montrer que $f''H \subset {}'\tilde{H}$. Pour cela, on va considérer $\beta \in {}''H$. Comme β est de degré maximum, elle est fermée. De plus, on travail avec des germes en 0 donc par le lemme de Poincaré, $\beta = d\alpha$. Mais alors, $f\beta = fd\alpha = (\tilde{\nabla}f)(df \wedge \alpha) - df \wedge \alpha \in {}'\tilde{H}$. Dès lors, on a l'égalité recherchée.

- On considère maintenant la famille $w, \tilde{\nabla}fw, xw, yw, x^2w, x^3w, x^4w, x^5w, y^2w, y^3w, xyw$. Ces éléments ne sont pas dans $'H$. Comme le quotient $\frac{''H}{'H}$ est de dimension 11, pour démontrer que cette famille est une base, il suffit de montrer qu'elle est génératrice. Or on sait que $''H = (\tilde{\nabla}f)''H + ''H$ et que $J(f)''H \subset 'H$. Donc les classes de $w, fw, xw, yw, x^2w, x^3w, x^4w, x^5w, y^2w, y^3w, xyw, \tilde{\nabla}(w), \tilde{\nabla}(fw), \tilde{\nabla}(xw), \tilde{\nabla}(yw), \tilde{\nabla}(x^2w), \tilde{\nabla}(x^3w), \tilde{\nabla}(x^4w), \tilde{\nabla}(x^5w), \tilde{\nabla}(y^2w), \tilde{\nabla}(y^3w), \tilde{\nabla}(xyw)$ dans $\frac{''H}{'H}$ engendre ce quotient. Or la classe de fw est nulle et $\tilde{\nabla}(w), \tilde{\nabla}(xw), \tilde{\nabla}(yw), \tilde{\nabla}(x^2w), \tilde{\nabla}(x^3w), \tilde{\nabla}(x^4w), \tilde{\nabla}(x^5w), \tilde{\nabla}(y^2w), \tilde{\nabla}(y^3w), \tilde{\nabla}(xyw)$ s'écrivent en fonction des restants (c.f. calculs de 3). Ainsi la famille $w, \tilde{\nabla}fw, xw, yw, x^2w, x^3w, x^4w, x^5w, y^2w, y^3w, xyw$ est génératrice et donc est une base de $\frac{''H}{'H}$.

5. Maintenant, on peut donner la matrice de $\tilde{\nabla}f$ dans la base trouvée:

$$\begin{array}{l}
 w \\
 \tilde{\nabla}fw \\
 xw \\
 yw \\
 x^2w \\
 y^2w \\
 x^3w \\
 y^3w \\
 x^4w \\
 x^5w \\
 xyw
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 w & \tilde{\nabla}fw & xw & yw & x^2w & y^2w & x^3w & y^3w & x^4w & x^5w & xyw \\
 0 & -\frac{5}{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & \frac{11}{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \frac{2}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \frac{3}{4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{5}{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{5}{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \cdot & \cdot & \frac{7}{6} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{3}{2} & \cdot & \cdot & \frac{4}{5} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
 \end{pmatrix}$$

(les points représentent des 0)

REMARQUE 6.4.7 On a $\tilde{\nabla}(f\alpha) = \alpha + f\tilde{\nabla}(\alpha)$. Dès lors, $t.\tilde{\nabla} = (\tilde{\nabla}f) - id$. On peut donc calculer le résidu de la connexion $\tilde{\nabla}$ le long de $\{0\} \subset D$. Cette matrice n'est rien d'autre que:

$$\begin{pmatrix}
 -1 & -\frac{5}{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & \frac{11}{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \frac{-1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -3 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{3}{2} & \cdot & \cdot & \frac{-1}{5} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0
 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple, similaire à celui-ci, est donné dans [3]. Pour plus de détails sur la théorie, voir [11].

Annexe A

Le théorème d'indice.

On veut démontrer le théorème d'indice:

THEOREME A.0.8 Soit D une (E, F) -connexion. Supposons E et F de type fini sur \mathcal{O} et $\frac{F}{E}$ de torsion. Alors:

1. Le noyau et le conoyau de D sont de dimension finie sur \mathbb{C} .
2. $\chi(D, E, F) = \dim_{\mathbb{C}} \ker D - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker} D$ et $\chi(D, E, F) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{F}{E} = \operatorname{rg} E$.

La proposition clé pour la démonstration de ce théorème est donnée par Malgrange dans [6] (proposition 3.6):

PROPOSITION A.0.9 Soit $D = x^H \frac{d}{dx} - M$ un système différentiel avec $H = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_m)$ matrice diagonale et M matrice à coefficients holomorphes. Alors $D : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^m$ a pour indice $(m - h_1 - \dots - h_m)$.

On va maintenant donner une démonstration du théorème:

Démonstration

Supposons tout d'abord que E et F sont libres. On remarque tout d'abord qu'il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $x^l F = E$. En effet, $E = f_1 \mathcal{O} + \dots + f_p \mathcal{O}$ et $F = f_1 \mathcal{O} + \dots + f_m \mathcal{O}$. Et comme $\frac{F}{E}$ est de torsion, il existe $x^l \in \mathcal{O}$ tel que $x^l \cdot (f_{p+1} \mathcal{O} + \dots + f_m \mathcal{O}) = 0$ et ainsi, $x^l F = E$. Alors, d'après la proposition précédente, $x^l D : E \rightarrow E$ a pour indice $(1-l) \operatorname{rg} E$.

Or d'après l'additivité des indices, on a:

$$\chi(x^l D, E, E) = \chi(D, E, F) + \chi(x^l : F \rightarrow E)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \chi(x^l : F \rightarrow E) &= \dim \frac{F}{x^l E} - \dim \frac{E}{x^l F} \\ &= \dim \frac{F}{E} - \dim \frac{x^l E}{x^l F} \\ &= \dim \frac{F}{E} - \dim \frac{F}{x^l F} \\ &= \dim \frac{F}{E} - l * \operatorname{rg} E \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\chi(D, E, F) + \dim \frac{F}{E} = \operatorname{rg} E$$

Dans le cas général, on a le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E^T & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \overline{E} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow D^T & & \downarrow D & & \downarrow \overline{D} \\
 0 & \longrightarrow & F^T & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \overline{F} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

et alors en utilisant le lemme du serpent, $\chi(D, E, F) = \chi(\overline{D}, \overline{E}, \overline{F}) + \chi(D^T, E^T, F^T)$.

Or $\chi(D^T, E^T, F^T) = -\dim \frac{F^T}{E^T}$. En effet, E^T et F^T sont de torsion et de type fini. Dès lors, ils sont de dimensions finies sur \mathbb{C} .

D'où

$$\begin{aligned}
 \chi(D, E, F) + \dim \frac{F}{E} &= \chi(\overline{D}, \overline{E}, \overline{F}) + \dim \frac{F}{E} - \dim \frac{F^T}{E^T} \\
 &= \chi(\overline{D}, \overline{E}, \overline{F}) + \dim \frac{\overline{F}}{\overline{E}} \\
 &= \text{rg } \overline{E} \text{ car } \overline{E} \text{ et } \overline{F} \text{ sont libres et } \frac{\overline{F}}{\overline{E}} \text{ est de torsion.} \\
 &= \text{rg } E \text{ car } \overline{E} \otimes K = E \otimes K.
 \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [1] E. BRIESKORN: *La monodromie des singularité isolées d'hypersurfaces* (*Manuscripta Math.*, vol. 2, 1970).
- [2] B. MALGRANGE: *Intégrales asymptotiques et monodromie* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 7, 1974).
- [3] M. EL AMRANI: *La connexion de Gauss-Manin pour une hypersurface à singularité isolée* (notes du séminaire de variables complexes, 1985).
- [4] J. MILNOR: *Singular points of complex hypersurfaces* (*Ann. of Math. Studies*, n 61, Princeton 1968).
- [5] M. SEBASTIANI: *Preuve de la conjecture de Brieskorn* (*Man. Math.*, vol. 2, 1970, p. 301-308).
- [6] J.P. SERRE: *Algèbre locale; multiplicités* (*Lectures notes in Math.*, n 11, Springer-Verlag, 1965).
- [7] B. MALGRANGE: *Sur les points singuliers des équations différentielles* (*Enseignement Math.*, XX, 1-2, 1974).
- [8] C.E. TITCHMARSH: *The theory of functions* (Oxford, 1939, P. 177-180).
- [9] M. HERRERA: *Integration on a semi-analytic set* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 94, 1966, p. 141-180).
- [10] K. SAÏTO: *Quasihomogene isolierte singulariten von hyper flächen* (*Inventiones Math.* 14, Springer-Verlag, 1971, p.123-142).
- [11] J. SCHERK: *On the Gauss-Manin connection of an isolated hypersurface singularity* (*Math. Ann.* 238, Springer-Verlag, 1978, p.23-32).
- [12] MILNOR-STASHEFF: *Characteristic classes* (*Annals of mathematics studies*, 1974, p.259)
- [13] BOREL: *Algebraic D-Module*, HAEFLIGER, exposé 3