

Vendredi 13 Juin 2008 15h - 16h

(1)

Luc Menuchi

Soutenance Habilitation

Je vous expose la partie des travaux
qui constituent mon habilitation,

la plus récente et qui est en commun avec Chataur

Plan

I Introduction

II Résultats

III Construction des opérations

IV Cohomologie de Hochschild

Soit X un espace topologique

espace des

Loops libres en X , $\mathcal{L}X := \text{map}(S^1, X)$



$H_*(\mathcal{L}X)$ joue un grand rôle en physique
mathématique.

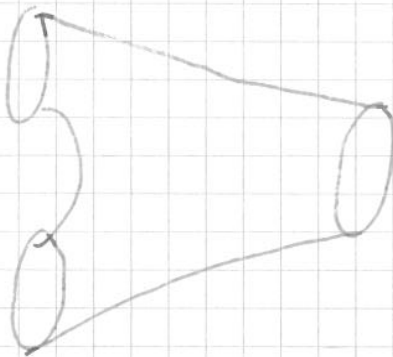
Les interactions de particules dans la physique
des cordes engendrent des structures algébriques
sur $H_*(\mathcal{S}X)$ ou $H^*(\mathcal{S}X)$

ou fusion de particules



en théorie des cordes fermées

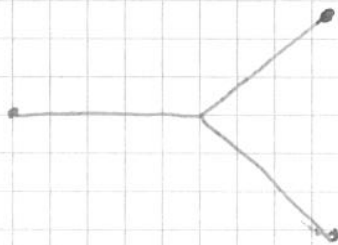
$F_{0,2+1}$



est une pantalon avec 2 entrées et une sortie.

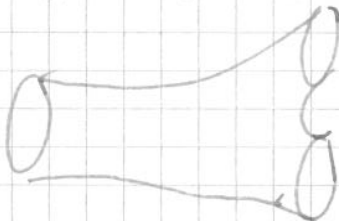
Cette surface orientée définit un produit sur $H_*(\mathcal{S}X)$

tandis que division de particules



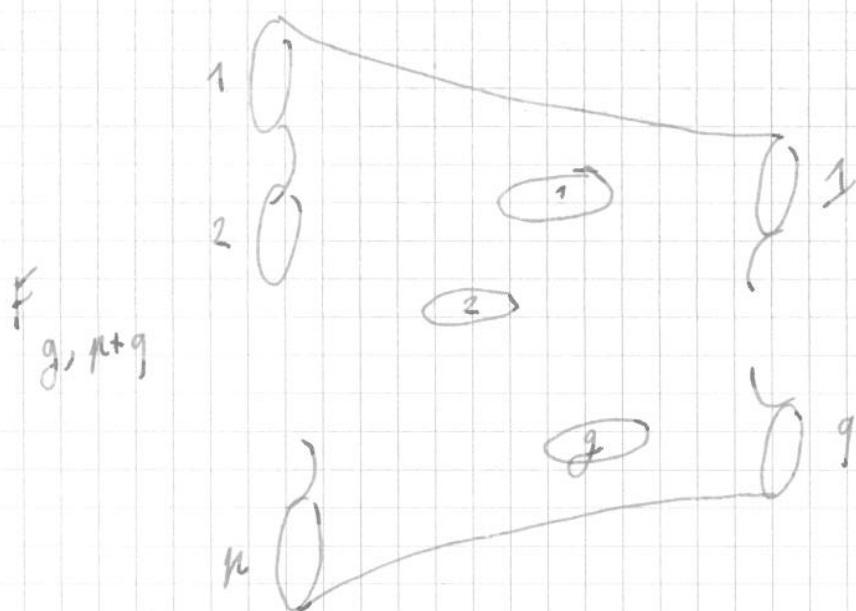
en théorie des cordes

$F_{0,1+2}$



donne un coproduit $H_*(\mathcal{L}X) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}X) \otimes H_*(\mathcal{L}X)$ (3)

Plus généralement une surface de genre g avec μ entrées et q sorties



définit une opération

$$H_*(\mathcal{L}X)^{\otimes \mu} \longrightarrow H_*(\mathcal{L}X)^{\otimes q}$$

Quand $X = M$ une variété

ces structures ont été définies par Chao et Sullivan

Le but de cet exposé est de définir ces structures

- pour $X = BG$ le classifiant d'un groupe de Lie G

Rappelons que $H_*(\mathcal{L}BG) \cong H_*^G(\mathcal{G}^{Ad})$

Freed, Hopkins et Teleman ont montré que

(4)

ces structures algébriques existent aussi

$T_K^* \left(G^{Ad} \right)$ la K -théorie équivariante l'induce

Nos travaux se situent donc à l'intersection de ceux de

Chas - Sullivan et ceux de Freed - Hopkins - Teleman

II

(5)

Thm Soit G un groupe de Lie compact connexe

alors $H_*(\mathcal{L}BG)$ est une Homological Conformal Field Theory. (HCFT)

c à d pour toute surface $F_{g, p+q}$

Soit $\chi(F_{g, p+q}) = 2 - 2g - p - q$ sa caractéristique d'Euler

Soit $\text{Diff}^+(F, \partial) = \left\{ \begin{array}{l} \text{difféomorphismes de } F \text{ préservant} \\ \text{l'orientation et fixant le bord point par point} \end{array} \right\}$

Il existe une famille d'opérations de degré $-\dim_{\mathbb{G}} \chi(F)$

$$H_* \mathcal{B} \text{Diff}^+(F, \partial) \otimes H_*(\mathcal{L}BG)^{\otimes p} \longrightarrow H_*(\mathcal{L}BG)^{\otimes q}$$

compatible - aux recollements de surfaces

- à la renumérotation des composantes de bords entrantes et sortantes

En se limitant à $H_0(B_{\text{Diff}}^+(F, F)) \cong \mathbb{F}$ corps de base ⑥

Corollaire 1: Pour toute surface $F_{g, n+g}$

on a une opération

$$H_* (\mathcal{L}BG)^{\otimes p} \longrightarrow H_* (\mathcal{L}BG)^{\otimes q}$$

c.à.d. $H_* (\mathcal{L}BG)$ est une Topological Quantum Field Theory

ce qui est équivalent à

$H_* (\mathcal{L}BG)$ est une algèbre commutative de Frobenius
(demo courante!)

Le dual d'une HCFT est aussi une HCFT

donc $H^* (\mathcal{L}BG)$ est aussi une HCFT

Corollaire 2 $H^* = H^{*+\dim G} (\mathcal{L}BG)$

est une BV-algèbre

c.à.d. muni d'un produit commutatif

$$H^p \otimes H^q \longrightarrow H^{p+q}$$

et d'une différentielle $\Delta: H^p \longrightarrow H^{p-1}$

$$t_q \{a, b\} = \pm \Delta(ab) \pm (\Delta a)b \pm a\Delta b$$

est un crochet de Poisson

Rappelons

th Chas - Sullivan

$H_* = H_{* + \dim M}(\mathcal{L}M)$ est une BV-algèbre

III Intégration le long de la fibre

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$

une filtration (de Serre) Ex fibre localement trivial

 B connexe par arcstelle que l'homologie de la fibre $H_*(F)$ soit concentrée en degré $\leq n$ et

$$H_n(F) \cong \mathbb{R} \quad \text{Ex } F = M^n \text{ variété orientée compacte de dim } n$$

alors en homologie on a une application dans le bon sens

$$H_*(p): H_*(E) \longrightarrow H_*(B) \quad \text{qui préserve le degré}$$

et une application dans le mauvais sens qui

change le degré appelé intégration le long de la fibre

$$\text{note } p^!: H_*(B) \longrightarrow H_{*+n}(E)$$

Considérons

* l'action du groupe fondamental $\pi_1(B)$
sur $H_n(F)$ induit par l'holonomie est trivial

Une telle filtration équipée d'un générateur

de $H_n(F)$ est appelée filtration orientée

III Construction des opérations

(8)

Par restriction sur les bords entrants et sortants de $F_{g, p+q}$, on obtient 2 fibrations

$$\mathcal{L}BG^{\times p} \xleftarrow{\text{in}} \text{map}(F_{g, p+q}, BG) \xrightarrow{\text{out}} \mathcal{L}BG^{\times q}$$

Proposition Si $p \geq 1$ et $q \geq 1$

alors la fibre de in est homotope à $G^{-\chi(F)}$

donc est une variété orientée de dim $n = \dim G \times (-\chi(F))$

on a donc une application d'intégration le long de la fibre

$$H_* (\mathcal{L}BG^{\times p}) \xrightarrow{\text{in}_!} H_{*+n} \text{map}(F, BG)$$

et en composant par

$$H_* \text{map}(F, BG) \xrightarrow{H_*(\text{out})} H_* (\mathcal{L}BG^{\times q})$$

on obtient l'opération associée à $F_{g, p+q}$

$$H_* (\mathcal{L}BG)^{\otimes p} \longrightarrow H_* (\mathcal{L}BG)^{\otimes q}$$

donc on a démontré le Corollaire 1

Pour le théorème, on veut une famille d'opérations
indexées par $H_* B Diff^+(F, J)_{g, p+q}$

En appliquant le foncteur $E Diff^+(F, J) \times_{Diff^+(F, J)} -$

à in et à out,

on obtient

$$B Diff^+(F, J) \times LBG^{*p} \xleftarrow{p_{in}} E Diff^+(F, J) \times_{Diff^+(F, J)} map(F, BG)$$

qui reste une fibration
de même fibre

$$B Diff^+(F, J) \times LBG^{*q}$$

$$LBG^{*q} \xrightarrow{proj}$$

En homologie, on a donc

$$H_* (B Diff^+(F, J) \times LBG^{*p}) \xrightarrow{p_{in}!} H_* (E Diff^+(F, J) \times_{Diff^+(F, J)} map(F, BG))$$

$\times - \dim G \times \mathcal{U}(F)$

$$\downarrow$$

$$H_* (- \dim G \times \mathcal{U}(F)) (LBG^{*q})$$

V Cohomologie de Hochschild

Thm FTV

$$IH_*(LM) \underset{\substack{\text{ind d'ev sur corps IF} \\ BV\text{-alg sur } \mathbb{Q}}}{\cong} HH^*(S^*(M); S^*(M))$$

Thm Chataur - M

$$IH^*(LBG) \underset{\text{ind d'ev}}{\cong} HH^*(S_*(G); S_*(G))$$

Question ind de BV-alg ?