UNIVERSITE D'ANGERS Licence de Mathématiques 2ème année.
ENSEMBLE SCIENTIFIQUE

Analyse 1, examen du 09/01/2013

Exercice 1 : On considère la fonction définie par $f(x) = (x-2)\exp(3/x)$.

1) Préciser son domaine de définition et sa limite quand $x \to \pm\infty$

La fonction f est définie pour $x \neq 0$. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} \exp(3/x) = 1$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2) Déterminer la limite en $\pm\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$, puis à l'aide d'un développement limité par rapport à $\frac{1}{x}$ déterminer une asymptote oblique éventuelle.

Comme $\frac{f(x)}{x} = (1-\frac{2}{x})\exp(3/x)$ on a de même

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

On effectue un D.L. à l'ordre 2 de $\exp(3/x)$ puis de f :

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{9}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 1+\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent :

$$f(x) = x+1-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

ce qui montre que le graphe de la fonction f admet la droite d'équation $y = x+1$ comme asymptote et que la courbe est au dessous de l'asymptote du coté des x positifs et en dessous de l'autre coté. Remarque : le texte demandait seulement l'asymptote et pas la position. On pouvait donc se contenter d'un D.L. de $\exp(3/x)$ à l'ordre 1.

Exercice 2 : On considère la courbe paramétrée $(\mathcal{C})$ donnée par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = e^t - t \\ y(t) = e^t/(1+t) \end{cases}$$

1) Préciser le domaine d'étude de $(x(t), y(t))$ et déterminer les branches infinies et leur nature.

La fonction $t \to x(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \to y(t)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Le domaine d'étude est donc $(-\infty,-1[\cup]-1,+\infty)$

- **Branche associée à** $+\infty$: comme $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}$, et que par conséquent $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, on constate que :

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty; \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty; \quad \text{et } \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

  On obtient donc une branche parabolique horizontale.

- **Branche associée à** $-\infty$: comme $x(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -t$ et $y(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{e^t}{t}$, on constate que :

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty; \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

  On obtient une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

- **Branche associée à** -1 : on a $\lim\limits_{t\to -1} x(t) = \frac{1}{e}+1$ et $y(t) \underset{t\to-1}{\sim} \frac{\frac{1}{e}}{t+1}$. Ceci montre que $\lim\limits_{t\to(-1)_{\pm}} y(t) = \pm\infty$ et on a une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{e}+1$.

2) Etudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ et résumer les résultats des deux premières questions dans un tableau de variations.

Les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ sont :

$$x'(t) = e^t - t; \quad y'(t) = \frac{te^t}{(1+t)^2}$$

et les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont décroissantes sur $(-\infty, 0]$ et croisantes sur $[0, +\infty)$. Le tableau suivant résume tous les résultats acquis jusqu'ici :

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$			-		0	$+$	
$y'(t)$		-		-	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On détecte un point stationnaire en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ pour la valeur $t = 0$ du paramètre.

3) Etudier le point stationnaire qui pourra se présenter en un point (x_0, y_0) à préciser. On conseille d'effectuer un développement limité à l'ordre 3 pour déterminer la tangente et la forme du point stationnaire détecté.

Le D.L. pour $x(t)$ en $t = 0$ résulte d'un calcul immédiat et celui de $y(t)$ des techniques usuelles :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) - t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ y(t) = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6})(1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)) = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \end{cases}$$

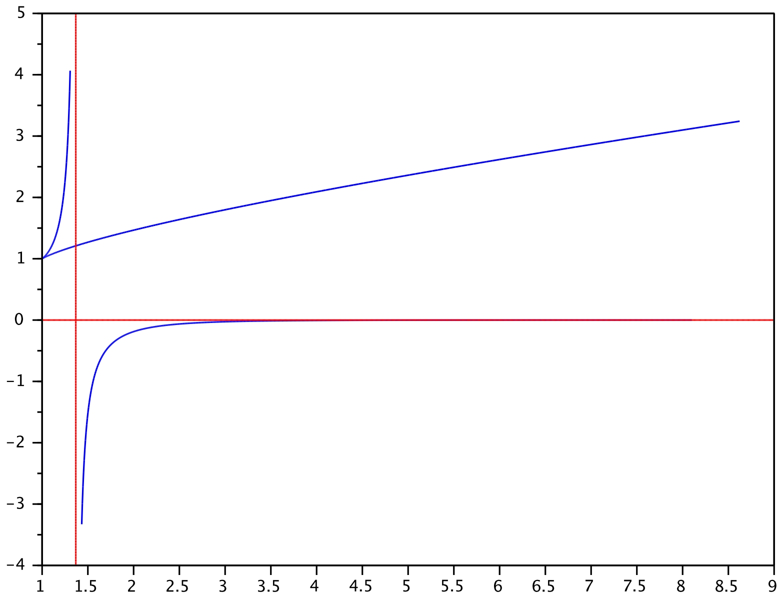
Les coefficients respectifs de $\frac{t^2}{2}$ et de $\frac{t^3}{6}$ dans $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sont les vecteurs indépendants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que la courbe présente un point de rebroussement de première espèce.

4) Terminer cette étude par un tracé de la courbe $(\mathcal{C})$.

Voir page suivante. Il est très mal vu de négliger délibérément cette question. L'expérience montre que ce n'est pas une formalité même après une étude correcte.



Exercice 3 : Déterminer la nature de chacune des 4 séries dont le terme général est donné ci-dessous :

$$1) \quad a_n = \frac{n^3+3n+2}{n^4-n^2+1}, \qquad 2) \quad b_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1,$$

$$3) \quad c_n = \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^n.n!}, \qquad 4) \quad d_n = \frac{\ln(n)}{n(n+1)}.$$

1. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ est *à termes positifs* et divergente, on en déduit que la série de terme général a_n est divergente.
2. On effectue un développement limité en substituant $x = \frac{(-1)^n}{n}$ dans : $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ce qui donne :
$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$
Le terme général b_n de notre série est donc la somme de $\frac{(-1)^n}{n}$ terme général d'une série alternée convergente et de $r_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. On constate donc que r_n est équivalent au terme général **positif strictement** d'une série de Riemann convergente. La série de terme général r_n est donc convergente.
On en déduit que la série de terme général b_n est convergente, comme somme de deux séries convergentes.
Rappel des fausses pistes vers lesquelles il convenait de ne pas se fourvoyer.
   - Il est vrai que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, mais comme la série de droite n'est pas à termes de signe constants, on sait exemple à l'appui que ce seul constat ne permet pas de conclure.
   - Si on pouvait appliquer **à** b_n **elle même** le théorème des séries alternées ce serait correct. Malheureusement il se trouve dans cet exemple que $|b_n|$ n'est pas décroissant et ne l'est à partir d'aucun rang.

- La méthode efficace dans cette situation est d'effectuer un D.L. Observez sur le corrigé que le D.L. est poussé jusqu'au premier terme absolument convergent et qu'on prend bien soin d'inclure le reste dans le raisonnement.
- Mais écrire seulement $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ne suffit pas. On ne peut pas éluder le cas du reste $o\left(\frac{1}{n}\right)$ qui ne peut pas être traité en en restant là. En fait passer outre revient à faire la faute dénoncée dans le premier item.

3. On a

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3^n.n!\sqrt{(2n+2)!}}{3^{n+1}.(n+1)!\sqrt{(2n)!}} = \frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}{3(n+1)} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})}{(n+1)^2}}$$

On trouve donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2}{3} \in [0,1[$. On en déduit que la série de terme général c_n est convergente d'après la règle de D'Alembert.

Pas d'autre difficulté ici que de bien calculer. Se rappeler que la règle de D'Alembert n'est qu'une règle à ne pas appliquer à tout propos et hors de propos. C'est une affaire de bon sens.

4. Comme $n^{\frac{3}{2}} d_n = \frac{\sqrt{n}\ln n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, la suite $n^{\frac{3}{2}} d_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. on en déduit que la série de terme général d_n est convergente par comparaison à la série de Riemann convergente de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Contrairement à certaines affirmations grossièrement fausse d_n n'est pas équivalent à (ni dailleurs majoré par...) la fraction $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 4 : On considère une série de terme général $u_n > 0$ et on lui associe la série dont le terme général est

$$v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

On veut montrer que **si** cette dernière série est convergente, **alors** la série de terme général u_n est divergente.

1) Déduire de la convergence de $\sum v_n$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = +\infty$ puis que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 u_n}$

Le terme général d'une série tend vers zéro. Donc v_n tend vers 0 par valeurs positives vu son signe. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n^2 u_n = +\infty$, donc aussi en otant 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = +\infty$ Par conséquent :

$$v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2 u_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 u_n}$$

2) Soit $w_n = \sqrt{u_n v_n}$. Déduire de la question précédente la divergence de la série de terme général w_n.

De l'équivalent de la question précédente on tire

$$w_n = \sqrt{u_n v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{u_n \frac{1}{n^2 u_n}} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général est donc divergente. (couper coller l'argument de l'exercice 3)1) !)

3) Montrer l'inégalité $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et en déduire la divergence annoncée de la série de terme général u_n.

Quels que soient les réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on calcule $\frac{1}{2}(x+y) - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}) = \frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$. Le résultat est positif, ce qui donne $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$. L'inégalité demandée est donc démontrée avec $x = u_n, y = v_n$.

Ainsi $u_n + v_n$ est minoré par $2w_n$, terme général d'une série divergente **à terme positifs**. Elle est donc divergente. Comme la série $\sum v_n$ est par hypothèse convergente cela impose que la série de terme général u_n est divergente.

4) On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Trouver une valeur de α pour laquelle *les deux* séries divergent. Si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et pourvu que $\alpha < 2$, on a $v_n = \frac{1}{1+n^{2-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$. On en déduit donc que

- Si $\alpha \in]1,2[$, la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge
- Si $\alpha \in]1,2[$, la série $\sum u_n$ diverge et la série $\sum v_n$ converge
- Si $\alpha = 1$, on a aussi $2-\alpha = 1$ et les deux séries divergent D'après la question 3) il est exclus que les deux séries convergent. Nous constatons que les trois autres cas sont possibles. (le texte ne demandait que le troisième exemple !).

Exercice 5 : Déterminer la nature de chacune des 3 intégrales suivantes :

$$1)\quad \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t(1-t)}dt, \qquad 2)\quad \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}dt, \qquad 3)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+t}dt.$$

1. Comme $\arctan(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arctan(t)}{t(1-t)} = 1$ et la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0. Par contre
$$\frac{\arctan(t)}{t(1-t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{\frac{\pi}{4}}{1-t}$$
et comme l'intégrale de fonction positive, non bornée en 1, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$ est divergente l'intégrale proposée est également divergente.
2. On a $|\sin(t)|e^{-t} \leq e^{-t}$ est puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente, l'intégrale proposée est absolument convergente donc convergente.
Signalons plusieurs façons de raisonner faux qui ont été rencontrées. Prétendre que $\sin(t)e^{-t}$ est équivalent à e^{-t}, affirmation dont la fausseté se passe de commentaire.
Ecrire seulement que $\sin(t)e^{-t} \leq e^{-t}$. Certes c'est tout à fait exact mais ne sert à rien : comment en effet espérer démontrer une convergence absolue si on zappe la valeur absolue dans l'inégalité ?
3. On a
$$\frac{\sqrt{t}}{t^2+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$
ce qui montre que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+t}dt$ par comparaison aux intégrales du type $\frac{1}{t^\alpha}$. On a aussi
$$\frac{\sqrt{t}}{t^2+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$
ce qui montre aussi la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t^2+t}dt$ par comparaison aux intégrales du type $\dfrac{1}{t^\alpha}$.
Par addition des deux morceaux, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+t}dt$ converge.

C'était une quasi question de cours ou si on préfère un cas d'école pour tester le cahier des charges de ce genre d'étude : 1) se rappeler qu'il convient de traiter séparément les problèmes de convergence aux deux extrémités. 2) connaître le cours sur les $\frac{1}{t^\alpha}$. Aucune excuse n'est recevable pour les erreurs. 3) Plus spécifiquement dans la prise d'équivalent en 0, veiller au fait que c'est le terme de plus bas degré (contrairement à ce qui se passe en $+\infty$...) qui l'emporte, par exemple ici t dans t^2+t.

Exercice 6 : Déterminer la nature de l'intégrale suivante par une étude directe qui utilise une intégration par parties appropriée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t}dt$$

Soit $X > 0$ On effectue sur $[0, X]$ l'intégration par partie fournie par $u'(t) = \cos(t), v(t) = \frac{1}{1+t}$, $u(t) = \sin(t), v'(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$:

$$\int_0^X \frac{\cos(t)}{1+t}dt = \frac{\sin(t)}{1+t}\Big|_{t=0}^X + \int_0^X \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}dt = \frac{\sin(X)}{1+X} + \int_0^X \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}dt.$$

On a $\frac{|\sin(t)|}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{(1+t)^2}$ et donc par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ce résultat signifie que $\int_0^X \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}dt$ admet une limite quand $X \longrightarrow +\infty$. Comme d'autre part $\frac{\sin(X)}{1+X}$ tend vers 0, $\int_0^X \frac{\cos(t)}{1+t}dt$ a aussi une limite.

C'est exactement affirmer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t}dt$ est convergente.

N.B. Une étude plus poussée montrerait que cette intégrale est seulement semi-convergente.