Licence à distance
Chapitre V: Intégration numérique

M. Granger

Table des matières

1 Introduction

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On s'intéresse dans ce chapitre à différentes méthodes permettant d'évaluer numériquement l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt$$

Le principe est de remplacer cette intégrale par une somme finie $\Sigma(f)$ dépendant de f :

$$f \to \Sigma(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

et Σ est appelé opérateur d'intégration approchée. L'objectif est de rendre la différence $|\Sigma(f) - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)|$, expression de l'erreur inhérente à la méthode utilisée soit aussi petite que possible.

Ce problème sera abordé à partir de la section 4. Nous allons étudier dans un premier temps la question suivante : Comment approximer la fonction f par une fonction polynomiale P. Cette étude sera un outil pour l'évaluation des intégrales parce que les intégrales des fonctions polynomiales sont aisées à évaluer.

Notons $\mathcal{P}_n$, l'espace vectoriel (de dimension $\leq n+1$) des polynômes de degré $\leq n$. Citons trois problèmes :

1. **Interpolation**. Trouver $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$, pour une suite finie x_i de points de $[a, b]$.
2. **Approximation uniforme**. Trouver P_n de degré n réalisant le minimum dans $\mathcal{P}_n$ de la norme du sup :
$$\|f - P_n\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)|$$
appelé polynôme de meilleure approximation uniforme.
3. **Approximation quadratique**. Trouver P_n de degré n réalisant le minimum dans $\mathcal{P}_n$ de la norme L_2 :
$$\|f - P_n\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx}$$
ou plus généralement de la norme L_2 associé à une densité continue positive $w(x)$, qu'on appellera aussi fonction de poids :
$$\|f - P\|_w = \sqrt{\int_a^b (f(x) - P(x))^2 w(x) dx}$$
Un tel polynôme est appelé polynôme de meilleure approximation quadratique de degré n.

On étudiera uniquement les premier et le troisième problèmes, en raison de leur lien avec l'intégration numérique .

2 Interpolation de Lagrange

2.1

On se fixe dans l'intervalle $[a, b]$, n points $x_0, \cdots, x_n$ appelé aussi noeuds de l'interpolation, et une fonction continue f. On note $f_i = f(x_i)$. Le résultat qui suit ne dépend que des valeurs de f aux points x_i.

Théorème 1 *.- Pour tout choix de $n+1$ noeuds x_i, et toute f, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ tel que*
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ P(x_i) = f(x_i)$$

Démonstration.- Cherchons le polynôme sous la forme suivante
$$P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Il s'agit donc de résoudre le système d'équations :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k = f(x_j)$$

qui est un système linéaire de $n+1$ équations aux $n+1$ inconnues $a_0, \cdots, a_n$. La matrice de ce système est la matrice carrée :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_i & \cdots & x_i^j & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & & x_n^n \end{pmatrix}$$

Comme $det(M) = \Pi_{i<j}(x_j - x_i) \neq 0$ (déterminant de Vandermonde), ce système est de Cramer, ce qui établit l'existence et l'unicicité d'une solution, donc d'un polynôme d'interpolation $P \in \mathcal{P}_n$. $\square$

L'application linéaire $ev : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $ev(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n))$ est injective. En effet si $P \in ker(ev)$, P est nul car c'est un polynôme de degré $\leq n$ possédant $n+1$ racines $x_0, \cdots, x_n$. Ainsi ev est linéaire injective entre espaces de même dimension donc est un isomorphisme. Ceci donne une démonstration alternative plus abstraite du théorème 1.

Expression du polynôme d'interpolation en fonction de f et des x_i.

On note $L_{n,i}$ la solution du problème correspondant au second membre $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$. C'est un polynôme $L_{n,i}$ tel que $L_{n,i}(x_j) = 0$ pour $i \neq j$, donc il est de la forme $c.\Pi_{j\neq i}(x - x_j)$. Ensuite l'égalité $L_{n,i}(x_i) = 1$, détermine c :

$$L_{n,i}(x) = \Pi_{j\neq i}(x - x_j)/(x_i - x_j) = \frac{(x - x_0)\cdots\widehat{(x - x_i)}\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots\widehat{(x_i - x_i)}\cdots(x_i - x_n)}$$

Par linéarité de ev on en déduit l'expression du polynôme d'interpolation général :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x - x_0)\cdots\widehat{(x - x_i)}\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\cdots\widehat{(x_i - x_i)}\cdots(x_i - x_n)}$$

Au passage on déduit de ce calcul et du théorème sur l'interpolation le résultat suivant :

Proposition 1 *La famille des polynômes $\{L_{n,0}, \cdots, L_{n,n}\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.*

En effet c'est l'image réciproque par l'isomorphisme ev de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$

Remarques 1) Cette base n'est pas très appropriée pour mener par exemple des calculs par récurrence sur le nombre de points. Pour pallier à ce défaut, il existe une méthode d'évaluation appelée méthode des différences divisées, fondée sur la construction d'une base échelonnée. Nous n'en parlons pas dans ce cours.

2) Posons $\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$. On obtient alors l'expression suivante pour les $L_{n,i}$ et P_n, simple remodelage de la formule précédente :

$$L_{n,i} = \frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi'_{n+1}(x_i)(x - x_i)} \ , \ P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi'_{n+1}(x_i)(x - x_i)}$$

2.2 Evaluation de l'erreur

Ici on ne s'intéresse pas aux $f_(x_i)$ seulement, mais à la différence $f - P_n$ en tout point sous une hypothèse de régularité sur f.

Théorème 2 *Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors quel que soit $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)f^{(n+1}(\xi_x)$$

L'ordre des quantificateurs est important et la notation $\xi_x = \xi$ est là pour rappeler que ξ dépend du point x.

Signalons aussi qu'on obtient en fait en examinant la démonstration l'encadrement plus précis :

$$\xi \in]min(\{x, x_0, \cdots, x_n\}), max(\{x, x_0, \cdots, x_n\})[$$

Lemme 1 .- *Soit $g \in \mathcal{C}^p([a,b], \mathbb{R})$, admettant $p+1$ zéros deux à deux distincts $\alpha_0 < \cdots < \alpha_p$. Alors il existe $\xi \in]\alpha_0, \alpha_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.*

Démonstration *du lemme.*- C'est une récurrence fondée sur le théorème de Rolle qui sera donnée en exercice. □

Démonstration *du théorème* Si $x = x_i$, l'énoncé à démontrer est immédiat puisque tout ξ convient. On suppose désormais que pour tout i, on a $x \neq x_i$. Notons P_{n+1} le polynôme d'interpolation de f aux $n+2$ points $x, x_0, \cdots, x_n$. En particulier on a les égalités :

$$f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) \text{ et } f(x_i) - P_n(x_i) = P_{n+1}(x_i) - P_n(x_i) = 0, \text{ pour } i = 0, \cdots, n$$

Comme $P_{n+1} - P_n$ est de degré $n+1$, la connaissance de ses $n+1$ racines x_i donne une égalité :

$$P_{n+1}(u) - P_n(u) = c.\pi_{n+1}(u) \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

Posons alors $g(u) = f(u) - P_{n+1}(u) = f(u) - P_n(u) - c.\pi_{n+1}(u)$. On a $g(x) = 0$, $g(x_0) = 0, \cdots$, $g(x_n) = 0$, donc d'après le lemme de Rolle généralisé, il existe ξ dans l'intervalle indiqué tel que : $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. En tenant compte du fait que $P_n^{(n+1)} = 0$ on obtient l'équation suivante dont on pourra tirer c en fonction de ξ :

$$f^{(n+1)}(\xi) = c.\pi_{n+1}^{(n+1)} = c.(n+1)!$$

Donc $P_{n+1}(u) - P_n(u) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\pi_{n+1}(u)$, d'où en $u = x$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\pi_{n+1}(x)$$

□

Corollaire 3 $\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|\pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!}.\|f^{(n+1)}\|_\infty$

L'efficacité de cette majoration dépend donc de la norme $\|\pi_{n+1}\|_\infty$.

Il existe des choix des points x_i qui s'avèrent meilleurs que le choix $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ de point équidistants. Dans la sous-section suivante nous traitons un exemple :

2.3 Interpolation aux points de Tchebychev

Proposition-définition 1 .-

1) Il existe un unique polynôme de degré n noté T_n, tel que pour tout $u \in [-1,1]$:

$$T_n(u) = cos(nArccos(u)).$$

2) Les polynômes T_n satisfont aux relations de récurrence

$$T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n.$$

3) Le polynômes $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est un polynôme unitaire de $\mathcal{P}_n$ dont la norme du sup sur $[-1,1]$ est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Définition 1 .- *Le polynôme T_n est appelé le nième polynôme de Tchebychev*

Démonstration *de la proposition.-* La condition sur T_n revient à la suivante : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Nous allons raisonner par récurrence. Le cas $n=1$ est clair avec $T_1 = X$.
Par l'hypothèse de récurrence, $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ et $\cos(n-1)\theta = T_{n-1}(\cos\theta)$, et d'après la formule trigonométrique bien connue $cos(n+1)\theta + cos(n-1)\theta = 2cos\theta cosn\theta$:

$$cos(n+1)\theta = -T_{n-1}(\cos\theta) + 2\cos\theta T_n(\cos\theta)$$

ce qui établit en même temps l'assertion demandée et la relation de récurrence. L'unicité de T_n est garantie par le fait que c'est un polynôme et qu'on en connaît une infinité de valeurs (tous les $T_n(u)$ pour $|u| \leq 1$).
Par récurrence sur n on trouve immédiatement $degT_n = n$. Soit c_n le coefficient dominant de T_n. On a $c_1 = 1$ et par la formule de récurrence c_n est aussi le coefficient dominant de $2XT_{n-1}$, ce qui montre que $c_n = 2c_{n-1}$. Par récurrence on trouve comme annoncé $c_n = 2^{n-1}$.

Enfin $\|T_n\|_\infty = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\cos(n\theta)| = 1$, puisque la norme $\|T_n\|_\infty$ est prise sur $[-1,1]$, donc coincide avec la borne supérieure des $|T_n(\cos\theta)|$. $\square$

Lemme 2 *.- Les zéros de T_{n+1}, sont les $n+1$ points de $[-1,1]$, rangés par ordre décroissant, $u_i = cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi$.*

En effet $T_{n+1}(u_i) = cos(n+1)\frac{(2i+1)\pi}{2n+2} = cos\frac{(2i+1)\pi}{2} = 0$ et comme T_{n+1} est de degré $n+1$, ce sont là tous ses zéros.

Considérons l'interpolation de Lagrange aux points u_i, ou sur leurs images par une similitude de $[-1,1]$ vers un intervalle $[a,b]$ quelconque. Cette interpolation est plus avantageuse du point de vue de la formule de majoration de l'erreur que, par exemple l'interpolation en des points équidistants. Voici un élément à l'appui de cette affirmation :

Proposition 2 *.- Pour l'interpolation aux point de Tchebychev on a l'évaluation suivante :*

$$\|\pi_{n+1}\|_\infty = 2.\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{n+1}$$

Démonstration.- Traitons d'abord le cas $[a,b] = [-1,1]$. Alors $\frac{1}{2^n}T_{n+1}$, et $(\pi_{n+1})_{[-1,1]}$ sont égaux car ils sont unitaires avec les même zéros, tous simples. Donc $\|\pi_{n+1}\|_\infty = \|\frac{1}{2^n}T_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n}$, ce qui est l'égalité à démontrer dans le cas $b-a=2$.
En général on considère le changement de paramètre affine :

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ u & \longrightarrow & x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}.u \end{array}$$

Ainsi dans $[a,b]$ on effectue l'interpolation aux points $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}.u_i$ et on obtient la formule :

$$(\star) \qquad \pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^n (x - x_i) = \Pi_{i=0}^n \frac{b-a}{2}(u-u_i) = (\frac{b-a}{2})^{n+1}(\pi_{n+1})_{[-1,1]}(u),$$

où on a pris soin de distinguer par la notation $(\pi_{n+1})_{[-1,1]}$ le polynôme unitaire s'annulant aux noeuds relatifs à l'intervalle standard, de celui que nous étudions sur l'intervalle $[a,b]$. Le résultat annoncé se déduit de la formule $(\star)$:

$$\|\pi_{n+1}\| = (\frac{b-a}{2})^{n+1}\frac{1}{2^n} = 2(\frac{b-a}{4})^{n+1}.$$

$\square$

On démontre, et nous l'admettrons, que dans le cas de points équidistants, la norme $\|\pi_{n+1}\|_\infty$ est proportionnelle à $\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$. La majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange aux points de Tchebycheff est donc meilleure par un facteur $(\frac{e}{4})^n$.

Phénomène de Runge : Considérons le polynôme d'interpolation P_n de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en des points équidistants $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Il n'est pas vrai en général que $P_n(x)$ converge partout vers $f(x)$. On peut expérimenter cela pour la fonction

$$\frac{1}{x^2 + a}$$

sur $[-1, +1]$ pour diverses valeurs de a. Une étude théorique de ce phénomène dépasse le cadre de ce cours.

3 Approximation polynomiale

3.1 Meilleure approximation quadratique et polynômes orthogonaux

On considère sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, le produit scalaire défini par :

$$< f, g >= \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

avec $w(x) > 0$ intégrable.

Théorème 4 . *Quel que soit n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ tel que :*

$$\forall P \in \mathcal{P}_n, \ \|f - P_n\|_w \leq \|f - P\|_w$$

Démonstration.- L'existence de P_n est vraie dans le contexte plus général d'une norme arbitraire sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ ne provenant pas forcément d'un produit scalaire.

L'espace $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel de dimension finie dans lequel les compacts sont les fermés bornés, et sur lequel toutes les normes sont équivalentes. L'ensemble $K = \{P \in \mathcal{P}_n, \ \|f - P\| \leq \|f\|\}$, est donc compact et non vide car il contient le polynôme nul. Le fonction continue $P \to \|f - P\|$, atteint son minimum en un point $P_n \in K$ et, par la définition même de K, $\|f - P_n\| \leq \|f\|$ et ce minimum est absolu.

Examinons maintenant l'unicité. On se donne P_n, une solution du problème et P un élément quelconque de $\mathcal{P}_n$ écrit sous la forme $P = P_n + Q$. Quelque soit $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\|f - (P_n + tQ)\|_w^2 = \|f - P_n\|_w^2 + 2t < f - P_n, Q > + t^2 \|Q\|_w^2$$

L'inégalité $\|f - (P_n + tQ)\|_w^2 \geq \|f - P_n\|_w^2$, donne alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ 2t < f - P_n, Q > + t^2 \|Q\|_w^2 \geq 0,$$

ce qui impose la relation d'orthogonalité $< f - P_n, Q >= 0$, et on en déduit que

$$\|f - P\|_w^2 = \|f - P_n\|_w^2 + \|Q\|^2 \geq \|f - P_n\|_w^2$$

avec égalité si et seulement si $Q = 0$, c'est à dire comme annoncé $P = P_n$. □

Cette démonstration a consisté en fait à montrer que P_n est dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$.

Recherche du polynôme P_n, comme solution d'un système linéaire.

On vient de voir que P_n est l'unique P dans $\mathcal{P}_n$, tel que $f - P_n$ soit orthogonal à l'espace $\mathcal{P}_n$, ou ce qui revient au même à tous les monômes x^j pour $j = 1, \cdots, n$.

D'ou en notant $P = \sum a_i x^i$, le système linéaire aux inconnues a_i.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i < x^i, x^j >_w = < f, x^i >_w \ .$$

Les coefficients de la matrice du système sont les produits scalaires $< x^i, x^j >_w$.

Exemple : Si $w = 1$, on trouve la matrice H_n des $1/(i+j)$ dite matrice de Hilbert

Elle est particulièrement mal conditionnée. Pour $H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$, on trouve déjà que $cond_2(H_4)$ est de l'ordre de 15000. Et $cond(H_8)$, est de l'ordre de 10^{10} !

Cette observation justifie le fait qu'on utilise plutôt les polynômes orthogonaux pour calculer le polynôme de meilleure approximation quadratique.

Un exemple quand même qui sera détaillé en exercice : e^x sur $[0,1]$, avec $n = 1$. On trouve le polynôme $a + bx$ où $a = 4e - 10 \simeq 0,87313$ et $b = 6.(3 - e) \simeq 1,69030$

Remarque (hors programme) :Quand l'intervalle est un compact $[a,b]$, on a le résultat de convergence $\|f - P_n\|_w \to 0$. C'est une conséquence directe du résultat suivant que nous admettons : Toute fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ fermé et borné est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $\mathcal{B}_n(f)$ de degrés n, les polynômes de Bernstein. En effet on en déduit la majoration :

$$\|f - P_n\|_w \leq \|f - \mathcal{B}_n(f)\|_w = \int_a^b w(t)(f(t) - \mathcal{B}_n(f)(t))dt \leq \int_a^b w(t)dt \cdot \|f - \mathcal{B}_n(f)\|_\infty$$

3.2 Polynômes orthogonaux

Théorème 5 *et définition.- Il existe une unique suite de polynômes unitaires* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que* $degP_n = n$*, et quels que soient* m, n*, avec* $m \neq n$*,* $< P_m, P_n >_w = 0$*.*

Cette suite est appelée suite des polynômes orthogonaux pour le poids w*.*

Avant de commencer la démonstration voici le lien avec la section précédente : Soit $P \in \mathcal{P}_n$ le polynôme de degré n réalisant la meilleure approximation quadratique de $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On décompose P sur la base des polynômes orthogonaux :

$$P = \sum_{i=O}^{n} \lambda_i P_i$$

Comme P est l'unique élément de $\mathcal{P}_n$ tel que $f - P$ est orthogonal à $\mathcal{P}_n$, on a, pour tout i, $< f - P, P_i > = 0$. Les coefficients λ_i sont donc déterminés par les équations :

$$\int_a^b w(x)f(x)P_i(x)dx = < f, P_i > = < P, P_i > = \lambda_i \|P_i\|_w^2$$

Démonstration.- Il s'agit simplement de la méthode d'orthogonalisation de Schmidt.

On contruit les P_n par récurrence sur n, en partant de $P_0 = 1$, et en cherchant P_n, sous la forme

$$P_n = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$$

ce qui est légitimé par le fait que $\{P_0, \cdots, P_{n-1}\}$ est une base (échelonnée) de $\mathcal{P}_{n-1}$. La condition d'orthogonalité $< P_n, P_k > = 0,$ pour $k = 0, \cdots, n-1$, donne immédiatement une détermination unique des coefficients de P_n sur cette base :

$$\lambda_i = \frac{< x^n, P_k >_w}{\|P_k\|_w^2}$$

□

Dans cet énoncé la condition d'être unitaire n'est faite que pour assurer l'unicité. On pourra considérer, d'autre suites Q_n de polynômes de degrés échelonnées, et deux à deux orthogonaux. Par l'unicité des P_n les Q_n sont constants à un facteur multiplicatif près, soit $Q_n = a_n(Q_n).P_n$. Dans l'exercice 5 où sont présentés des polynômes deux à deux orthogonaux mais NON unitaires, il faudra jouer avec les coefficients dominants pour se ramener à la situation du cours.

Dans ce qui suit nous allons résumer les principales propriétés des polynômes orthogonaux dans deux résultats et ensuite nous donnerons des exemples classiques.

Théorème 6 .- *Les polynômes P_n vérifient une relation de récurrence :*

$$P_n = (x - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< x.P_{n-1}, P_{n-1} >}{\|P_{n-1}\|_w^2} \qquad \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|_w^2}{\|P_{n-2}\|_w^2}$$

Démonstration. Il s'agit de deux observations :
1) Puisque xP_{n-1} est unitaire de degré n, il admet sur la base des P_k une décomposition du type :

$$xP_{n-1} = P_n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i$$

et les coordonnées α_i sont données par un calcul de produit scalaire

$$< xP_{n-1}, P_i >= \alpha_i \|P_i\|_w^2$$

2) Par définition du produit scalaire on a $< xP_{n-1}, P_i >=< P_{n-1}, xP_i >$ et ceci est nul par un argument de degré dès que $i + 1 = deg(x.P_i) < n - 1$, donc $\alpha_i = 0$ pour $i \leq n - 3$.

Pour conclure, il reste à voir que $< x.P_{n-1}, P_{n-2} >=< P_{n-1}, x.P_{n-2} >= \|P_{n-1}\|_w^2$.

□.-

On a par ailleurs déjà repéré la propriété suivante sur les polynômes de tchebycheff :

Théorème 7 .- *Le polynôme P_n pour le poids w sur l'intervalle I a n zéros distincts dans I.*

Démonstration.- On note à priori $x_1, \cdots, x_k$, les zéros distincts de P_n situés dans l'intervalle $[a, b]$, de multiplicités respectives m_i avec $m_1 + \cdots + m_k \leq n$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire sans racine dans $I = [a, b]$ tel que :

$$P = \Pi_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i} R.$$

On définit de façon unique $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ par la condition :"$m_i + \epsilon_i$ est pair". Considérons alors le polynôme $Q = \Pi_{i=1}^k (x - x_i)^{\epsilon_i}$. On constate que $P_n Q = \Pi_{i=1}^k (x - x_i)^{m_i + \epsilon_i} R$, est de signe constant sur I. On a donc $< P_n, Q > \neq 0$, ce qui impose $degQ = n$, puisque P_n est orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}$. La condition condition $degQ = n$ équivaut au fait que $P_n = Q$ et que P_n a n zéros simples situés dans $[a, b]$, comme on le voit en observant la définition même de Q. .

□

3.2.1 Quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux

Les propriété de ces exemples feront l'objet d'exercices plus détaillés :

– **Polynômes de Legendre.** On prend $w = 1$ sur $[-1, 1]$. On trouve aisément pour commencer $P_0 = 1, P_1 = x$. On montrera en exercice qu'ils sont proportionnels aux polynômes non unitaires :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$$

On trouve $\gamma_n = \frac{1}{2n+1} = \|P_n\|_w^2$, $P_n(1) = 1$, et la relation de récurrence :

$$(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)xP_n = nP_{n-1}$$

– **Polynômes de Tchebychef**
Lemme 3 . *Les polynômes $T_n(x)$, tels que $T_n(cos\theta) = cosn\theta$, sont orthogonaux relativement au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ sur $[-1, 1]$*
En effet par le changement de variables $x = cos\theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} T_n(x)T_m(x)dx = \int_{\pi}^{0} cosn\theta cosm\theta(-d\theta) = 0 \text{ si } m \neq n$$

– **Polynômes de Hermitte** $]a, b[=] - \infty, +\infty[$ et $w = e^{-x^2}$
– **Polynômes de Laguerre** $]a, b[=]0, +\infty[$ et $w = e^{-x}$

4 Généralités sur l'intégration numérique

On considère une fonction pouvant s'écrire $x \longrightarrow w(x)f(x)$, avec w définie continue strictement positive et intégrable sur $]a, b[$, et $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

On appelle opérateur d'intégration noté I_w, l'application définie sur $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

$$I_w\ :\ f \longrightarrow I_w(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx.$$

On cherche à approcher $I_w(f)$ par des opérateurs associés à des familles de points $\{x_0, \cdots, x_n\}$, et à des familles de réels appelés poids.

Définition 2 .- *On appelle opérateur d'intégration approché (ou O.I.A. en abrégé) associé aux x_i et à la famille de poids w_i l'application de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$*

$$\Sigma_n : f \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

L'opérateur Σ_n est dit de rang n.

Définition 3 .- *On dit que Σ_n est* exact *sur le sous espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ si*

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \Sigma_n(f) = I_w(f)$$

En général on recherche l'exactitude sur les polynômes.

Définition 4 *On dit que Σ_n est d'ordre d'exactitude au moins p, s'il est exact sur l'espace $\mathcal{P}_p$ des polynômes de degré $\leq p$.*

L'exactitude sur $\mathcal{P}_p$ équivaut par linéarité à l'ensemble fini des $p+1$ conditions suivantes :

$$\forall k \in \{0, \cdots, p\},\ I_w(x^k) = \Sigma_n(x^k)$$

ou pour être plus explicite :

$$\int_a^b x^k w(x)dx = \sum w_i x_i^k \text{ pour } k = 0, \cdots, p.$$

Dire que Σ_n est d'ordre d'exactitude p, se traduit alors simplement par la condition supplémentaire : $I_w(x^{p+1}) \neq \Sigma_n(x^{p+1})$.

Attention : Ne pas confondre le rang n avec l'ordre d'exactitude p. En effet, si dans tous les cas intéressant p est au moins égal à n, comme le montre le paragraphe suivant, on peut avoir $p > n$. Cette situation correspond même à des O.I.A. plus efficaces.

5 Opérateur d'intégration approchés.

5.1

L'idée première est de remplacer f par le polynôme d'interpolation $L_n(f)$ aux points considérés. Rappelons que $L_n(f) = \sum f(x_i)L_{n,i}$, où $L_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots\widehat{(x_i-x_i)}\cdots(x_i-x_n)}$. L'opérateur obtenu s'écrit donc :

$$\Sigma_n(f) = \int_a^b w(x)L_n(f)(x)dx = \int_a^b w(x)(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i}(x))dx$$

Ce qui donne bien une formule $\boxed{\Sigma_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i)w_i}$ avec les poids $\boxed{w_i = \int_a^b w(x)L_{n,i}(x)dx}$. Ces poids sont complètement caractérisés par la donnée des points x_i. (On pourrait donc en alourdissant les notations, écrire cet O.I.A $f \longrightarrow \Sigma_{n,\{x_0,\cdots,x_n\}}(f)$). On appelle un tel O.I.A, un O.I.A. par interpolation.

Proposition 3 *Soit Σ_n un O.I.A. de rang n. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*
1) Σ_n est un O.I.A. par interpolation.
2) Σ_n est exact sur $\mathcal{P}_n$ (=exact d'ordre au moins n).

Démonstration.- En effet si Σ_n est un O.I.A. par interpolation et $P \in \mathcal{P}_n$, on a $L_n(P) = P$, évident selon la définition de L_n. Il est donc clair que :

$$I_w(P) = I_w(L_n(P)) = \Sigma_n(P)$$

la première égalité étant triviale et la deuxième la définition de Σ_n.

Réciproquement soit Σ_n un O.I.A. de rang n et de poids w_i, tel que $\forall P \in \mathcal{P}_n,\ I_w(P) = \Sigma_n(P)$, on obtient en appliquant cette égalité à $L_{n,i}$ et en tenant compte de $L_{n,i}(x_j) = \delta_{i,j}$

$$I_w(L_{n,i}) = \Sigma_n(L_{n,i}) = \sum_{j=0}^{n} w_j L_{n,i}(x_j) = w_i$$

ce qui détermine complètement les poids de l'O.I.A., qui sont donc ceux de l'O.I.A. par interpolation.
□

Le résultat précédent montre que la considération d'O.I.A. $\sum w_i f(x_i)$ pour des poids différents est de faible interêt et nous ne considèrerons plus dans la suite que des O.I.A. d'interpolation.

Remarque sur la zéro-exactitude : Le fait que l'opérateur soit exact sur $\mathcal{P}_0$, c'est à dire en pratique sur la fonction **1**, se traduit par la relation $b - a = \sum_{i=0}^n w_i$. Il est naturel d'écrire l'O.I.A. $(b -$

$a) \sum \tilde{w}_i f(x_i)$, avec $\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i = 1$. Les $\tilde{w}_i$, sont les coefficients **normalisés** de somme 1, correspondant à un intervalle de longueur 1. En effet la formule de changement de variable

$$I_w(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx = (b-a)\int_0^1 w(a+t(b-a))f(a+t(b-a))dt$$

implique aussitôt le résultat suivant :

Lemme 4 .- *L' O.I.A. par interpolation aux point t_i sur $[0,1]$, noté $\sum \tilde{w}_i g(t_i)$, et l'O.I.A. sur $[a,b]$, dont les noeuds lui correspondent par affinité (i.e. $x_i = a + t_i(b-a)$), sont liés par le relation entre les poids :* $\boxed{w_i = (b-a)\tilde{w}_i.}$

5.2 Evaluation de l'erreur

L'erreur de méthode, sur l'évaluation de l'intégrale de f est l'erreur commise lorsqu'on remplace l'intégrale par l'O.I.A., c'est à dire :

$$\mathbb{E}_n(f) = I_w(f) - \Sigma_n(f)$$

Dans les cas d'un O.I.A. d'interpolation on est aussi amené à considérer l'erreur commise en remplaçant f par son polynôme d'interpolation. Il s'agit de la fonction de $x \in [a,b]$ définie par

$$\mathcal{E}_n(f)(x) = f(x) - L_n(f)(x)$$

Le lien entre ces deux notions est le suivant : l'erreur $\mathbb{E}_n(f)$ sur l'intégrale est la valeur de l'opérateur d'intégration I_w appliqué à la fonction $\mathcal{E}_n(f)$:

$$\mathbb{E}_n(f) = I_w(f) - \Sigma_n(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx - \int_a^b w(x)L_n(f)(x)dx = \int_a^b w(x)\mathcal{E}_n(f)(x)dx$$

Rappelons l'évaluation de l'erreur d'interpolation : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe $\xi_x \in [a,b]$, tel que $\mathcal{E}_n(f)(x) = \pi_{n+1}(x)\frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}$ où $\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)$. On a donc

$$\mathbb{E}_n(f) = \int_a^b w(x)\pi_{n+1}(x)\frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}dx$$

formule de maniement délicat à cause du signe de π_{n+1}.

Voici une méthode utile pour traiter le problème de l'erreur

Théorème 8 *Théorème de Peano.-*

Soit Σ_n un O.I.A. de rang n et d'ordre $p \geq n$. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. Alors l'erreur est donnée par la formule

$$\mathbb{E}_n(f) = \int_a^b G_p(t)f^{(n+1)}(t)dt$$

où G_p est le noyau de Peano, fonction de t définie par $G_p(t) = \mathbb{E}_n(\frac{(x-t)_+^p}{p!})$.

<u>Explication</u> : On désigne par $a_+ = max(0,a)$, la "partie positive" du réel a. Dans la définition du noyau de Peano, t est un paramètre et $G_m(t)$ est donc l'erreur de méthode sur l'intégrale de la fonction $x \longrightarrow \frac{(x-t)_+^p}{p!}$. L'intégrale est bien sur prise *par rapport à la variable* x et t est un paramètre et tout naturellement l'erreur $G_m(t)$en dépend. Explicitement cela donne :

$$G_m(t) = \int_a^b w(x)\frac{(x-t)_+^p}{p!}dx - \sum_{i=0}^{n} w_i\frac{(x_i-t)_+^p}{p!}$$

Noter que $\int_a^b w(x)\frac{(x-t)_+^p}{p!}dx = \int_t^b w(x)\frac{(x-t)^p}{p!}dx$, puisque $(x-t)_+^p = 0$ si $a \leq x \leq t$.

Démonstration *du Théorème de Peano.-* On applique la em formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{p!} \int_a^x (x-t)^n f^{(p+1)}(t)dt,$$

D'après l'hypothèse l'O.I.A. est exact sur la partie polynomiale de degré p du deuxième membre d'où, par linéarité de $\mathbb{E}_n$, l'égalité

$$\mathbb{E}_n(f) = \mathbb{E}_n(x \longrightarrow \frac{1}{p!} \int_a^x (x-t)^p f^{(p+1)}(t)dt).$$

De façon plus explicite cela donne, après avoir remarqué que

$$\int_a^x (x-t)^n f^{(p+1)}(t)dt = \int_a^b (x-t)_+^p f^{(p+1)}(t)dt,$$

avec $(x-t)_+^p = \begin{cases} (x-t)^p & \text{si} \quad t \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x \leq t \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n(f) &= \int_a^b (\frac{1}{p!} \int_a^b (x-t)_+^p f^{(p+1)}(t)dt) w(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i \frac{1}{p!} \int_a^x (x_i - t)_+^p f^{(p+1)}(t)dt \qquad (1) \\ &= \int_a^b \Big[\int_a^b \frac{1}{p!} (x-t)_+^p) w(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i \frac{1}{p!} (x_i - t)_+^p \Big] f^{(p+1)}(t)dt \qquad (2) \end{aligned}$$

La deuxième ligne est obtenue en appliquant le théorème de Fubini et en regroupant les deux termes sous une seule intégrale en t. On reconnaît alors dans l'expression entre $\Big[. \Big]$ le noyau de Peano annoncé.
□

6 Exemple 1 : opérateur de Newton-Cotes.

6.1

Cet exemple consiste à appliquer ce qui précède au cas d'une subdivision équidistante, avec $w(x) = 1$. On pose donc

$$a = x_0 < x_0 + h < x_0 + 2h \cdots < x_i = x_0 + ih < \cdots < x_n = b$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$. Ceci donne l'opérateur de Newton-Cotes d'ordre n :

$$NC_n(f) = \sum w_i f(x_0 + ih), \text{ où } w_i = \int_a^b \Pi_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Les coefficients normalisés, qui correspondent au cas $a = 0$ et $b = 1$ sont :

$$\tilde{w}_i = \int_0^n \frac{1}{n} \Pi_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}.$$

On peut dresser un tableau des valeurs obtenues en écrivant les numérateurs et dénominateurs entiers de $\tilde{w}_i = \frac{A_{n,i}}{D_n}$

n	D_n	$A_{n,0}$	$A_{n,1}$	$A_{n,2}$	$A_{n,3}$	$A_{n,4}$	$A_{n,5}$	$A_{n,6}$	$A_{n,7}$	$A_{n,8}$
1	2	1	1							
2	6	1	4	1						
3	8	1	3	3	1					
4	90	7	32	12	32	7				
5	288	19	75	50	50	75	19			
6	840	41	216	27	272	27	216	41		
7	17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	
8	28350	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989

Les exemples les plus simples sont et les plus utilisés sont la formule des trapèzes

$$NC_1(f) = (b-a).\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

et la formule de Simpson

$$NC_2(f) = (b-a).(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)).$$

L'exemple suivant permet de mesurer la très bonne efficacité de la formule de Simpson, avec $f(x) = e^x,\ [a,b] = [0,1]$ et des calculs à 10^{-5} près :

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1 \simeq 1,71828$$

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \frac{1+e}{2} \simeq 1,85914 \text{ (Trapèzes)}$$

$$\frac{f(0)+4f(1/2)+f(1)}{6} = \frac{1+\sqrt{e}+e}{6} \simeq 1,71886 \text{ (Simpson)}$$

Remarques sur l'ordre

On peut montrer que NC_{2q} et NC_{2q+1}, sont tous les deux d'ordre exactement $2q+1$. Voir la feuille de TD. Ceci explique que en dehors de la formule des trapèzes on n'utilise guère que les NC de rang impair.

Remarques sur la convergence

1) Il n'est pas vrai en général que $\lim_{n\to\infty} NC_n(f) = I_w(f)$.

2) Il est plus avantageux de subdiviser l'intervalle $[a,b]$, en un grand nombre de petits intervalles à chacun desquels on applique un opérateur NC. On obtient ainsi pour $n = 1, 2$ les méthodes classiques des trapèzes et de Simpson “composites”. Nous traitons la première dans la section suivante.

6.2 Méthode des trapèzes

Généralités sur les opérateurs composites

Pour le calcul approché d'intégrales la meilleure stratégie est de découper $[a,b]$ en intervalles égaux $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ et d'appliquer à chaque intervalle un opérateurs intégral approché d'ordre peu élevé. On pose :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

et on applique à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, un O.I.A. d'ordre q fixé en prenant dans $[a_i, a_{i+1}]$ des points $x_{i,j},\ j = 0, \cdots, q$.

Définition 5 .- *Un opérateur intégral approché de la forme*

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{j=0}^{q} w_{i,j} f(x_{i,j}))$$

est appelé un opérateur composite de type (m, q).

Nous allons terminer cette section avec l' exemple le plus courant et la majoration d'erreur :

Exemple : Méthode des trapèzes

Il s'agit d'un opérateur de type $(m, 1)$, fondé dans chaque intervalle sur la formule des trapèzes NC_1. L'erreur $\mathcal{R}_i$ sur la $i$ème intégrale est donc donnée par

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) + \mathcal{R}_i$$

On suppose les a_i équirépartis, c'est à dire $a_i = a+ih$, $h = \frac{b-a}{m}$. On obtient la formule des trapèzes, avec $\mathcal{R}$ somme des restes élémentaires $\mathcal{R}_i$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}) + \mathcal{R}.$$

Proposition 4 .- *Lorsque* f *est au moins de classe* $\mathcal{C}^2$*, on a la majoration suivante*

$$\mathcal{R} \leq M\frac{(b-a)^3}{12m^2}$$

où $M = sup_{\xi \in [a,b]} |f"(\xi)|$.

Démonstration.- Traitons d'abord le cas $m = 1$:

$$\int_a^b f(x)dx - NC_1(f) = \int_a^b (f(x) - P_1(x))dx$$

où $P_1(x) = -f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$ est le polynôme d'interpolation de f aux points a et b. Selon le théorème 2 sur l'évaluation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange, on a la majoration suivante de la fonction intégrée :

$$|f(x) - P_1(x)| = |\frac{(x-a)(x-b)}{2} f"(\xi_x)| \leq M\frac{(b-x)\cdot(x-a)}{2}.$$

donc la majoration de l'erreur sur l'intégrale :

$$|\mathcal{R}| = |\int_a^b f(x)dx - NC_1(f)| \leq \frac{M}{2}\int_a^b (b-x)\cdot(x-a)dx = \frac{M(b-a)^3}{12}.$$

N.B. Faire l'exercice de calcul consistant à contrôler la dernière égalité. Remarquer que le fait que $(b-x)\cdot(x-a) \geq 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ joue un rôle important.

Cas général : il suffit dans la formule précédente de remplacer la longueur $b - a$, par $h = \frac{b-a}{m}$ longueur de chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, ce qui donne pour l'évaluation de $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$, la majoration d'erreur :

$$|\mathcal{R}_i| \leq \frac{M(b-a)^3}{12m^3}$$

L'erreur $\mathcal{R}$, est le cumul des erreur $\mathcal{R}_i$, sur m intervalles donc a bien la forme annoncée.

□

Remarque : Dans le cas de l'opérateur composite fondé sur la formule de Simpson, on trouverait la majoration : $\mathcal{R} \leq \frac{M(b-a)^5}{2880m^4}$, où $M = sup_{\xi \in [a,b]}|f^{(4)}(\xi)|$ avec une convergence plus rapide en $1/m^4$ au lieu de $1/m^2$.

Le calcul est plus compliqué et le plus comode est de passer par les noyaux de Peano (hors programme).

7 O.I.A. de Gauss

On a vu que quel que soit le choix de $\{x_i \in [a,b], i = 1 \cdots n\}$, un O.I.A. d'interpolation est exact de rang n.

On peut améliorer ce résultat : on cherche *des noeuds x_i particuliers* en vue d'obtenir un ordre d'exactitude $m > n$ aussi élevé que possible. On montre qu'on peut obtenir un ordre d'exactitude égal à $2n+1$, en choisissant pour noeuds les racines du polynôme orthogonal de degré $n+1$ associé au même poids w que celui qui intervient dans l'intégrale qu'on cherche à approcher.

J'ai choisi de laisser ce sujet hors programme. Disponible sur demande pour les étudiants interessés.

7.1

On a vu que quel que soit le choix de $\{x_i \in [a,b], i = 1 \cdots n\}$, un O.I.A. d'interpolation est exact de rang n.

Dans ce qui suit on se propose d'améliorer ce résultat : on va chercher *des noeuds x_i particuliers* en vue d'obtenir un ordre d'exactitude $m > n$ aussi élevé que possible.

<u>exemple</u>

A priori on peut rendre $\int_0^1 f(x)dx \sim w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$ exact sur $\mathcal{P}_3$ au lieu de $\mathcal{P}_1$. Pour cela il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} w_0 & + & w_1 & = & 1 \\ w_0 x_0 & + & w_1 x_1 & = & 1/2 \\ w_0 x_0^2 & + & w_1 x_1^2 & = & 1/3 \\ w_0 x_0^3 & + & w_1 x_1^3 & = & 1/4 \end{cases}$$

Un calcul élémentaire donne la solution unique

$$w_0 = w_1 = 1/2, \text{ et } x_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \ x_1 = x_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$$

Il est en fait plus commode de résoudre en passant par affinité à un O.I.A. sur $[-1,1]$. On trouve $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>Exemple</u>

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e} \simeq 2,3504$$

$$\Sigma_2(e^x) = e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \simeq 2,3427$$

A nombre égal de point d'interpollation, le résultat est nettement meilleur que par l'opérateur $NC1$ de la formule des trapèzes.

Proposition-définition 2 .- *Etant donné $w(x)$, intégrable sur $[a,b]$, il existe un unique opérateur d'interpolation de rang n et exact à l'ordre $2n+1$ associé au poids w. On l'appelle opérateur de Gauss de rang n associé à w. Les points x_i correspondants sont les zéros du $(n+1)$ième polynôme orthogonal associé à w. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, l'erreur est donnée par la formule,*

$$\exists \xi \in [a,b], \ \mathbb{E}_n(f) = c_n f^{(2n+2)}(\xi), \ c_n = \frac{1}{(2n+2)!} \int_a^b w(x)[\pi_{n+1}(x)]^2$$

Démonstration On raisonnera à priori avec des points x_i (les inconnues du problème) arbitraires et l'opérateur d'interpolation qui leur est associé. On note comme d'habitude,

$$\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i) \in \mathcal{P}_{n+1}$$

Pour $P \in \mathcal{P}_p$, avec $p \geq n+1$, on effectue la division euclidienne par π_{n+1} et il vient $P = Q\pi_{n+1} + R_n$ avec $Q \in \mathcal{P}_{p-n-1}$, et $R \in \mathcal{P}_n$.

Par l'exactitude d'ordre au moins n de tout O.I.A. d'interpolation, $\Sigma_n(R) = I_w(R)$, et comme pour tout i, $\pi_{n+1}(x_i) = 0$, on a aussi $\Sigma_n(Q\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} w_i Q(x_i)\pi_{n+1}(x_i) = 0$.

Ainsi la condition d'exactitude sur P, $\Sigma_n(P) = I_w(P)$ est équivalente en raison de la linéarité des opérateurs Σ_n et I_w à

$$\Sigma_n(R) = I_w(Q\pi_{n+1}) + I_w(R)$$

et il reste en définitive : $I_w(Q\pi_{n+1}) = 0$, c'est à dire,

$$\int_a^b w(x)Q(x)\pi_{n+1}(x)dx = 0$$

Comme réaliser l'exactitude sur $\mathcal{P}_p$ revient à écrire cette équation pout tout $Q \in \mathcal{P}_{p-n-1}$, on voit que cela revient à demander que π_{n+1}, soit orthogonal à $\mathcal{P}_{p-n-1}$ pour le produit scalaire $<,>_w$. Comme l'orthogonalité de π_{n+1} à lui-même est exclue, on en déduit que la meilleure possibilité est de choisir pour π_{n+1} le $(n+1)$ième polynôme orthogonal (unitaire), et qu'on obtient ainsi l'exactitude sur $\mathcal{P}_{2n+1}$.

Remarquons que l'ordre d'exactitude est exactement $2n+1$, car évidemment $0 = \Sigma_n(\pi_{n+1}^2) \neq I_w(\pi_{n+1}^2) > 0$ $\square$

7.2 Quelques exemples

On recense ici les O.I.A associés aux familles de polynômes orthogonaux les plus courantes. Remarquons, dans les deux derniers exemples que la théorie s'adapte facilement, pour opérer sur des intégrales généralisées et fournir par exemple des formules exactes pour les intégrales de $e^{-x^2}P(x)$ ou $e^{-x}P(x)$ dans le cas où P est un polynôme de degré $\leq 2n+1$.

Dans chaque cas écrire les 3 ou 4 premiers opérateurs en exercice.

- O.I.A. de Gauss-Legendre
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$
où les x_i sont les zéros des polynômes de Legendre
- O.I.A. de Gauss-Tchebycheff
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \sim \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$
où les x_i sont les zéros des polynômes de Tchebycheff i.e. $x_i = cos(\theta_i)$ et $cos(n\theta_i) = 0$.
- O.I.A. de Gauss-Laguerre
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \sim \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$
les x_i zéros des polynômes de Laguerre
- O.I.A. de Hermite
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \sim \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$
les x_i zéros des polynômes de Hermitte.

8 Opérateurs composites

On a déjà vu que l'opérateur NC_n ne donne pas forcément de bons résultat pour n grand. La suite peut même diverger pour une fonction f fixée. Pour le calcul approché d'intégrales la meilleure stratégie est de découper $[a,b]$ en intervalles égaux $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ et d'appliquer à chaque intervalle un opérateurs intégral approché d'ordre peu élevé. On pose :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

et on applique à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, un O.I.A. d'ordre q fixé en prenant dans $[a_i, a_{i+1}]$ des points $x_{i,j},\ j = 0, \cdots, q$.

Définition 6 .- *Un opérateur intégral approché de la forme*

$$\Sigma(f) = \sum_{i=0}^{m-1} (\sum_{i=0}^{s} w_{i,j} f(x_{i,j}))$$

est appelé un opérateur composite de type (m,q). Il est de rang mq.

Nous allons terminer ce chapitre avec les deux exemples les plus courants et les majoration d'erreurs :

Exemple 1 : Méthode des trapèzes

Il s'agit d'un opérateur de type $(m,1)$, fondé dans chaque intervalle sur la formule des trapèzes NC_1. L'erreur $\mathcal{R}_i$ sur la $i$ème intégrale est donc donnée par

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) + \mathcal{R}_i$$

On supose les a_i équirépartis, c'est à dire $a_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{m}$. On obtient la formule des trapèzes, avec $\mathcal{R}$ somme des restes élémentaires $\mathcal{R}_i$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m}(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}) + \mathcal{R}.$$

Le reste peut étre évalué en utilisant le noyau de Peano et on trouve :

Exercice Lorsque f est au moins de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\exists \xi \in [a,b],\ \mathcal{R} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f"(\xi)$$

Exemple 2 : Méthode de Simpson.- C'est un O.I.A. composite obtenu en appliquant la formule de Simpson de coefficients normalisés $(1/6, 4/6, 1/6)$, sur chacun des m intervalles $[a_{2i}, a_{2i+2}]$, tirés d'une subdivision en $2n$ intervalles par les points

$$a_i = a + ih,\ i = 0, \cdots, 2m-1,\ h = \frac{b-a}{2m}.$$

On écrit donc

$$\int_{a_{2i}}^{a_{2i+2}} f(x)dx = \frac{2h}{6}[f(a_{2i}) + 4f(a_{2i+1}) + f(a_{2i+2})] + \mathcal{R}_i$$

puis

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(a_{2i+1}) + f(b)) + \mathcal{R}$$

et on trouve en appliquant encore la méthode de Peano

$$\exists \xi \in [a,b],\ \mathcal{R} = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\xi)$$

lorsque f est de classe $\mathcal{C}^4$.

Dans ces deux exemples on constate la convergence de la méthode par rapport au pas de la subdivision i.e. quand m tend vers $+\infty$, pour les fonctions assez régulières.

Remarques sur la convergence

Est il vrai que $\lim\limits_{n\to\infty} NC_n(f) = I_w(f)$?

Il n'en est rien en général. Voici un exemple qui montre que les choses ne vont pas toujours aussi bien qu'avec e^x :

$$\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2} = 2Arctan(4) \simeq 2,65164$$

mais les valeurs trouvées avec NC_{2i} pour i valant respectivement $1,2,3,4,5$, sont à 10^{-3} près :

$$5,490;\ 2,278;\ 3,329;\ 1,941;\ 3596$$

On sera donc plutôt amené à subdiviser l'intervalle $[a,b]$, en un grand nombre de petits intervalles et à appliquer à chacun d'eux les NC. On obtient pour chaque NC la méthode du même nom : méthode des trapèzes, ou méthode de Simpson. Voir le paragraphe suivant sur les opérateurs composites.

Au delà on n'utilise guère que NC_4 (Boole-Villarceau), ou NC_6 (Wedde-Hardy.)

8.1 Complément sur la convergence

On se donne pour chaque n une famille de points $\{x_{n,i},\ i = 0,\cdots,n\}$ et les poids $\{w_{n,i},\ i = 0,\cdots,n\}$ associés à la suite correspondante d'O.I.A. par interpolation,

$$\Sigma_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i})$$

On s'intéresse au comportement de $\Sigma_n(f)$ lorsque n croît, et aussi à l'influence d'une petite perturbation de f sur la suite des $\Sigma_n(f)$.

Définition 7 *On dit que la suite des Σ_n est stable, s'il existe un constante $K > 0$ telle que pour toute fonction $\epsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\Sigma_n(\epsilon) < K.max\{\epsilon(x_{n,i}),\ i = 0,\cdots,n\}$$

Définition 8 *On dit que la suite des Σ_n est convergente, si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n(f) = I_w(f)$$

On admettra le résultat suivant :

Théorème 9 *La suite Σ_n est convergente ssi elle est convergente sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$.*

La proposition suivante est de démonstration immédiate :

Proposition 5 *La suite Σ_n est stable si et seulement si il existe $K > 0$ tel que*

$$\forall n \sum_{i=0}^{n} |w_{i,n}| \leq K$$

Une conséquence immédiate est la suivante : Soit Σ_n une suite d'O.I.A. d'interpolation de rang n. Alors si tous les poids sont positif les Σ_n sont convergents. En effet, on a alors :

$$\sum |w_{n,i}| = \sum w_{n,i} = b - a$$

et comme Σ_n est exact sur $\mathcal{P}_n$ on en déduit le résultat.

Remarquons toutefois que la suite des opérateurs de Newton-Cotes ne remplit pas ces conditions, à cause des changements de signe. On peut montrer qu'elle n'est pas stable.