UNIVERSITÉ D'ANGERS **Licence 2–MPCIE**
2012–2013

Examen d'Analyse 1

Jeudi 10 janvier 2012 — durée : 2h30

Calculatrices et documents interdits

Exercice 1 – Déterminer la nature des cinq séries dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = n, \quad b_n = \frac{n^6}{6^n}, \quad c_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \quad d_n = \frac{\ln(n)}{n^2}, \quad e_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\ .$$

On rappelle que $e > 2$.

Exercice 2 – On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}\ .$$

1. On remarque que $u_n > 0$ quelque soit $n \geq 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n), puis en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.
2. Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = (-1)^n u_n$. La série de terme général v_n est-elle absolument convergente ?
3. Exprimer $\left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$ en fonction de u_n et de n. En déduire un équivalent de $w_n = u_n - \frac{1}{n}$ lorsque n tends vers l'infini. Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?
4. En déduire la nature de la série de terme général v_n.

Exercice 3 –

1. Étudier par un calcul direct la convergence de l'intégrale suivante et donner sa valeur le cas échéant
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$
2. Étudier la convergence des intégrales suivantes
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 4 – Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^4 x + a^4}}\,\mathrm{d}x$ avec $a > 0$.

1. Vérifier que cette intégrale est divergente si $a = 0$ et que $J(a)$ est convergente si $a > 0$.
2. Vérifier par deux changements de variables successifs que $J(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4 + a^4}} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^4+1}}$
3. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^4+1}}$ est convergente et en déduire que $J(a) \sim \frac{1}{a} I$ en 0^+.

Suite au verso $\Rightarrow$

Exercice 5 – On considère les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer en utilisant une IPP, que la première intégrale est convergente et en déduire que la deuxième l'est aussi par un changement de variables adapté.

Exercice 6 – On considère la courbe Γ définie par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3(2t^2-1)}{2-3t} \\ y(t) = \dfrac{t^2(2t^2-1)}{2-3t} \end{cases}.$$

1. Déterminer les branches infinies de la courbe Γ.
2. Déterminer la nature de chacune de ces branches infinies.
3. (Question facultative) Précisez la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.