UNIVERSITÉ D'ANGERS **Licence 2–MPCIE**
2012–2013

Session 2 : Examen d'Analyse 1

Jeudi 7 mars 2012 — durée : 2h30

Exercice 1 – Déterminer la nature des quatre séries dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n}, \quad b_n = \frac{2^n n^3 + 3^n n^2}{6^n}, \quad c_n = \frac{(2n)!}{(n^2+1)^n}, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}+1}\ .$$

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ le terme général d'une série convergente. On définit une suite (v_n) en posant

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}\ .$$

1. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ soit bien définie.
2. Démontrer que $v_n - u_n \sim -u_n^2$ lorsque $n \to \infty$.
3. Démontrer que les séries $\sum v_n$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.
4. Déterminer la nature de la série de terme général

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}, \quad n \geq 2\ ,$$

en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 3 –

1. Pour les intégrales généralisées suivantes établir qu'elles sont convergentes en les calculant :

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad J_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 0\ .$$

(Pour J_n : calcul de J_0 puis récurrence.)

2. Étudier la convergence des intégrales généralisées :

$$K = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x\ , \qquad L = \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\ .$$

Suite au verso $\Longrightarrow$

Exercice 4 – Soit
$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, \mathrm{d}t \ .$$

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, vérifier que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$ est convergente et établir, en posant $x = 2t$, la relation
$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, \mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \ .$$
3. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$ se prolonge par continuité en $t = 0$, puis établir que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t} dt \right) = 0.$$
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 5 – On cherche à construire la courbe Γ définie par les équations :
$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(3t) \\ y(t) = \sin^3(2t) \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques de période π.
2. Étudier la parité des fonctions x et y. En déduire que l'on peut restreindre l'étude de l'application $t \mapsto M(t)$ à l'intervalle $[0, \pi/2]$. *On expliquera par quelles transformations géométriques la courbe* Γ *se déduit de* $M([0, \pi/2])$.
3. Démontrer que $x(\pi/2 - t) - 1/2 = -(x(t) - 1/2)$ et $y(\pi/2 - t) = y(t)$. Par quelle symétrie obtient-on le point $M(\pi/2 - t)$ à partir de $M(t)$? En déduire que l'on peut restreindre l'étude de l'application $t \mapsto M(t)$ à l'intervalle $[0, \pi/4]$.
4. Dresser le tableau des variations de x et y sur le segment $[0, \pi/4]$ en mettant en évidence les valeurs de x, x', y et y' aux paramètres $t = 0, \pi/6$ et $\pi/4$.
5. Pour $t \in [0, \pi/4]$, déterminer les points stationnaires et étudier l'existence de tangentes en ces points.
6. Tracer la courbe Γ en faisant apparaître les points $M(t)$ pour $t = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ et les tangentes éventuelles en ces points.

Formulaire :

- $3\sqrt{3}/8 \simeq 0,65$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$