UNIVERSITE D'ANGERS Mathématiques L2.

Devoir 2. A rendre selon les groupes le jeudi 6/12 ou le mardi 6/12/2013.

Les étudiants sont invités à rendre ce devoir **par binôme voire par trinôme**.

Se concentrer en priorité sur l'exercice 1.

Ce devoir est un extrait de la session un 2012-2013.

Exercice 1 :

Déterminer la nature des cinq séries dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = n, \quad b_n = \frac{n^6}{6^n} \quad c_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}} \quad d_n = \frac{ln(n)}{n^2} \quad e_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

1) Comme $a_n \nrightarrow 0$, puisque $a_n \to +\infty$, la série $\sum a_n$ diverge.

2) Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $n^6 \leq 2^n$ donc $0 < b_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Par conséquent la série $\sum b_n$ converge. erratum : il y avait une erreur ici dans une version antérieure de ce corrigé !

Variante : On pouvait aussi utiliser la règle de D'Alembert.

3) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^2}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ (prendre le log, vu plusieurs fois en TD...).

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{4}{e^2}$. Comme $\frac{4}{e^2} < 1$, la série $\sum c_n$ converge.

4) On a $n\sqrt{n}d_n = \frac{ln(n)}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}d_n = 0$. Il en résulte qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow n^{\frac{3}{2}}d_n < 1$, ou $d_n < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Il en résulte que la série $\sum d_n$ converge comme la série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$.

5) On a $|e_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et ce calcul montre tout à la fois que $|e_n|$ tends vers 0, et est décroissant, puisque $n \to \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est une somme de deux fonction croissante.

Par conséquent la série de terme général alterné $e_n = (-1)^n|e_n|$ converge puisque les trois conditions du critére spécial des séries alternées sont remplies.

Il était correct mais parfaitement superflu d'utiliser la fonction $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ et sa dérivée car dans cet exemple a monotonie $0 < |e_{n+1}| < |e_n|$ résulte d'un calcul direct.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

1) On remarque que $u_n > 0$ quelque soit $n \geq 1$. Le vérifier. Déterminer la limite de la suite (u_n), puis en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

L'argument est découpé en trois étapes :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > 0$ car la fonction exponentielle, est partout positive donc en particulier $e^{-u_n} > 0$. Le premier terme u_0 est selon le texte arbitraire, tandis que tous les suivants sont > 0.

On peut observer qu'il n'y a nullement besoin d'une récurrence dans cet argument. L'hypothèse de récurrence $u_n > 0$ est aussi peu utile pour en déduire $u_{n+1} > 0$ que l'age du $n$ième capitaine.

(ii) Pour $n > 0$, puisque $u_n > 0$, on en déduit : $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par décalage la suite u_n tend donc vers 0.

Dire qu'on démontre « par récurrence sur n » que la suite $n \to u_n$ tend vers 0, n'a aucun sens puisque l'énoncé « la suite $n \to u_n$ tend vers 0 » est indépendant de n.

(iii) Maintenant qu'on sait que la suite u_n tend vers zéro on peut dire que e^{-u_n} tend vers 1 donc que

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

On en déduit que la série à termes généraux positifs $\sum u_n$ diverge à l'instar de la série de Riemann $\frac{1}{n}$.

Au chapitre des énormités lourdement pénalisées : écrire que $u_n \sim 0$ n'a aucun sens, car cela recèle une division par zéro.

2) Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = (-1)^n u_n$. La série de terme général v_n est-elle absolument convergente ?

La série de terme général $|v_n| = u_n$ est divergente d'après la question 1. Donc la série $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

3) Exprimer $u_{n+1} - \frac{1}{n+1}$ en fonction de u_n et de n. En déduire un équivalent de $w_n = u_n - \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers linfini. Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?

On calcule en utilisant l'équivalent $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$ allié au fait que la suite (u_n) tend vers 0 :

$$u_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ceci montre que la série de terme général $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{n+1}$ converge. Il en est de même par décalage de la série de terme général w_n

4) En déduire la nature de la série de terme général v_n (on écrira $u_n = w_n + \frac{1}{n}$) .

On a $v_n = (-1)^n u_n = (-1)^n w_n + \frac{(-1)^n}{n}$. Le premier terme de cette somme est le terme général d'une série absolument convergente d'après la question 3), donc convergente. Par ailleurs la série

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

Par conséquent et par addition la série $\sum v_n$ converge.

On peut songer à utiliser le critère spécial des séries alternées pour aboutir. Mais il faut pour que cela marche démontrer que la suite $|v_n| = u_n$ est décroissante. C'est probablement vrai à partir d'un certain rang mais la démonstration est alors exigible et non évidente. Nous ferons deux observations à ce propos :
- Manifestement ce n'est pas la méthode suggérée par le texte de l'exercice, sinon on ne voit pas pourquoi on se serait embarassé du détour par w_n à la question 3)
- Certains ont cru résoudre le problème en tenant pour vraie une implication fausse, qui affirmerait que la décroissance est conservée par prise d'un équivalent :
Dans cet exercice, il est vrai que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et il est tout aussi vrai que les $\frac{1}{n}$ forment une suite décroissante. Mais cela n'implique pas sans autre information que la suite (u_n) est décroissante.
Contre-exemple : $\frac{1}{n+(-1)^n}$ définie pour $n \geq 2$ n'est pas monotone et ne l'est pas au delà de n_0 quelque soit n_0

Suite : Indications sur le corrigé de la session 1, exercice 3 à 6

Exercice 3.

1) On effectue un changement de variable $u = \arctan x$ et un calcul direct :

$$\int_0^X \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_0^{\arctan X} u\,du = \frac{1}{2}(\arctan X)^2$$

Quand $X \to +\infty$, $\arctan X \to \frac{\pi}{2}$ donc l'intégrale proposée converge : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}$

2) La fonction $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ est non bornée de signe constant et il a une question de convergence à résoudre en 0. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ converge.

La fonction $\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ est non bornée sur tout intervalle $]0,\epsilon]$ et de signe constant. Il a une question de convergence à résoudre en 0 et en $+\infty$. On a :

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}dx$ converge. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} = 0$ puisque $x^2\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\frac{5}{2}}e^{-x}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}dx$ converge car pour x assez grand $0 < \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \leq \frac{1}{x^2}$.

Au final l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}dx$ converge « aux deux bouts », donc elle converge.

Exercice 4.

1) Pour $a = 0$ on a $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^4 x + a^4}} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc l'intégrale diverge. Pour $a \neq 0$ on a affaire à une intégrale usuelle de fonction continue.

2) Par le changement de variables $u = \sin x$:

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^4 x + a^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^4 + a^4}}$$

puis par le changement $u = av$:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^4 + a^4}} = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{adv}{\sqrt{(v^4+1)a^4}} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dv}{\sqrt{v^4+1}}$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{v^4+1}} \underset{v \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{v^2}$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{v^2} dv$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v^4+1}}$ converge. En notant I sa valeur ($I > 0$), on en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dv}{\sqrt{v^4+1}} = I + o\left(\frac{1}{a}\right)$ donc que

$$J(a) = \frac{1}{a}\left(I + o\left(\frac{1}{a}\right)\right) \underset{a \to 0}{\sim} \frac{I}{a}$$

Exercice 5.

On a par l'IPP $u' = \sin x$, $v = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\int_1^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{-\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_1^X - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} dx = \cos(1) - \frac{\cos X}{\sqrt{X}} - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} dx$$

cette expression a une limite quand $X \to +\infty$. Pour les deux premiers termes c'est parce que $\frac{-\cos X}{\sqrt{X}}$ tend vers zéro et pour l'intégrale ceci est dû au fait que $0 < \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} dx$ est absolument convergente donc convergente.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est donc convergente. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ est donc aussi convergente simplement parce que la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en zéro vu que $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x}$.

Exercice 6. Dans l'exercice 6, il s'agissait seulement d'étudier les branches infinies. Il n'était donc pas demandé d'étude de variations.

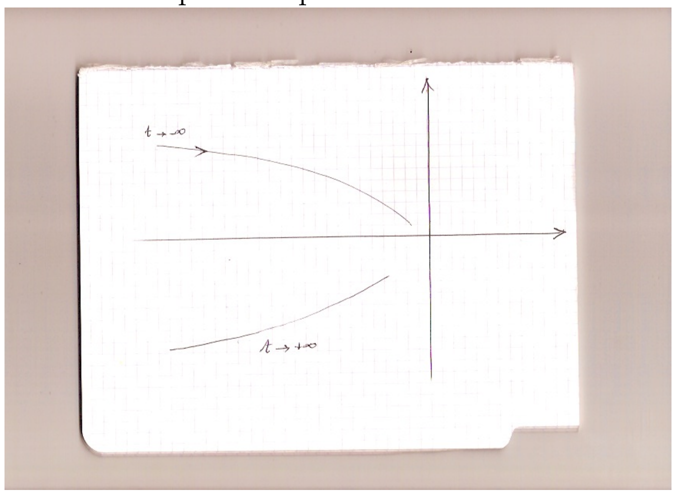
Il y a d'abord les deux branches obtenues quand $t \to \pm\infty$. On a

$$x(t) = \frac{t^3(2t^2-1)}{2-3t} \underset{t \to \pm\infty}{\sim} \frac{2t^5}{-3t} = -\frac{2}{3}t^4$$

et

$$y(t) = \frac{t^2(2t^2-1)}{2-3t} \underset{t \to \pm\infty}{\sim} \frac{2t^5}{-3t} = -\frac{2}{3}t^3$$

ainsi $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \mp\infty$ Comme par ailleurs $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{t}$ tend vers zéro quand $t \to \pm\infty$ on obtient deux branches paraboliques **horizontales**.



Quand $t \to \frac{2}{3}$ il y a encore une branche infinie puisque

$$x(t) = \frac{t^3(2t^2-1)}{2-3t} \underset{t\to\frac{2}{3}}{\sim} \frac{-8/3^5}{2-3t}$$

et

$$y(t) = \frac{t^2(2t^2-1)}{2-3t} \underset{t\to\frac{2}{3}}{\sim} \frac{-4/81}{2-3t}$$

donc x et y tendent vers $+\infty$ (resp.$-\infty$)quand $t \to (\frac{2}{3})_+$ (resp. quand $t \to (\frac{2}{3})_-$)

On a aussi $\lim_{t\to\frac{2}{3}} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3}{2}$, et on est donc amené à calculer

$$y(t) - \frac{3}{2}x(t) = \frac{(t^2 - \frac{3}{2}t^3)(2t^2-1)}{2-3t} = \frac{t^2}{2}(2t^2-1)$$

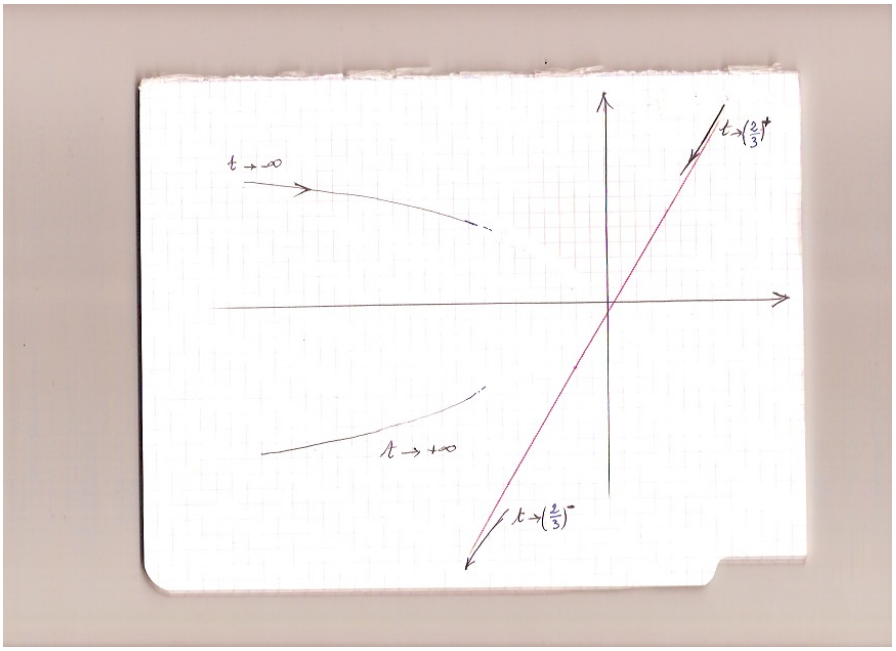
cette quantité tend vers $-\frac{2}{81}$ quand $t \to \frac{2}{3}$. Nous avons donc mis en évidence une asymptote oblique d'équation $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{81}$.

3) Pour en savoir plus (position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique) on fait un développement limité près de $t_0 = \frac{2}{3}$. Pour cela il est commode de poser $t = \frac{2}{3} + h$, d'où

$$y(t) - \frac{3}{2}x(t) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + h)^2(2(\frac{2}{3} + h)^2 - 1) = -\frac{2}{81} + \frac{28}{27}h$$

Ce calcul montre que la courbe est au dessus (resp au dessous) de son asymptote quand $t \to (\frac{2}{3})_+$ (resp. quand $t \to (\frac{2}{3})_-$).

Dans le dessin suivant qui illustre les résultats on n'a figuré que l'allure des branches infinies sans garantie d'exactitude d'échelle. Pour la façon dont ces branches se raccordent il faudrait mener une étude complète des variations de $x(t)$ et de $y(t)$.



Rappel : Soit $u_n > 0$ considéré comme le terme général d'une série. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty]$. Alors :

1) Si $\alpha < 1$ et si $\ell > 0$ la série diverge.

2) Si $\alpha > 1$ et si $\ell < +\infty$ la série converge