UNIVERSITE D'ANGERS
ENSEMBLE SCIENTIFIQUE

Master de Mathématiques MFA 1ère année.

Contrôle continu, Courbes et Surfaces, 11/03/2013. **Corrigé.**

Exercice 1 :

1)Question de cours. Rappeler la définition de la courbure et de la torsion pour une courbe gauche de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 3$ et rappeler les formules de Frenet pour les dérivées des 3 vecteurs du trièdre de Frenet.

Soit $\gamma : s \to \gamma(s)$ un paramétrage normal de la courbe proposée. Alors on appelle courbure en $p = \gamma(s)$ le réel positif : $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

Pour pouvoir définir le trièdre de Frenet on suppose que $k(s) \neq 0$ et on pose :

$$T(s) = \gamma'(s), \quad N(s) = \frac{1}{k(s)}\gamma''(s), \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

Par définition d'un paramétrage normal $T(s)$ est unitaire et $N(s)$ est unitaire par construction. Enfin $T(s)$ et $N(s)$ sont orthogonaux, car on obtient la relation $\langle T(s), N(s)\rangle = 0$ en dérivant $\langle T(s), T(s)\rangle = 1$. Le trièdre $(T(s), N(s), B(s))$ est donc une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ appelée trièdre de Frenet.

En dérivant $\langle T(s), B(s)\rangle = 0$ et en utilisant que $\langle T'(s), B(s)\rangle = 0$ on voit que $B'(s)$ est orthogonal à $T(s)$. Il est aussi orthogonal à $B(s)$ donc proportionnel à $N(s)$ ce qui permet de définir la torsion $\tau(s)$ en posant :

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

La matrice de tous les produits scalaires $\langle V'(s), W(s)\rangle$ de la dérivée d'un élément du trièdre de Frenet par un autre élément est antisymétrique ce qui au vu des élements déjà décrit fournit les formules de Frenet :

$$\begin{cases} T'(s) = & & k(s)N(s) & \\ N'(s) = & -k(s)T(s) + & & \tau(s)B(s) \\ B'(s) = & & -\tau(s)N(s) & \end{cases}$$

2)Vérifier que la torsion d'une courbe plane[1] est identiquement nulle.

Soit $s \to \gamma(s)$ un paramétrage normal, et $\mathcal{P}$ un plan affine tel que selon l'hypothèse $\gamma(s) \in \mathcal{P}$ pour tout s. Choississons $\gamma(s_0)$ un point de la courbe. En dérivant le relation $\gamma(s) \in \gamma(s_0) + \overrightarrow{\mathcal{P}}$ on constate que $\gamma'(s)$ et $\gamma''(s)$ sont des vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On se place au voisinage d'un point où $k(s) \neq 0$ pour que la torsion ait un sens. Alors $(T(s), N(s))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dépendant continûment de s. Par conséquent $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dépendant continûment de s donc constant. Donc $B'(s) = 0$ et la torsion est nulle.

3) Réciproquement montrer que si une courbe de l'espace de classe $\mathcal{C}^3$ a une torsion identiquement nulle le vecteur $B(s)$ du trièdre de Frenet est constant égal à un vecteur noté B. En déduire que la courbe est plane tracée dans le plan passant par $\gamma(s_0)$ et orthogonal à b.

On se place à nouveau dans un intervalle où $k(s) \neq 0$. On note $\mathcal{P}$ le plan affine passant par $\gamma(s_0)$ et orthogonal à B. En dérivant la relation $\langle \overrightarrow{\gamma(s_0)\gamma(s)}, B\rangle = 0$, on trouve la relation

$$\frac{d}{ds}\langle \overrightarrow{\gamma(s_0), \gamma(s)}, B\rangle = \langle T(s), B\rangle = 0$$

Ceci montre que $\gamma(s)$ reste dans le plan affine $\mathcal{P} := \gamma(s_0) + B^{\perp}$ orthogonal à B et passant par $\gamma(s_0)$.

Exercice 2 :

On considère la courbe paramétrée

$$\gamma :]0, \pi[\to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2}\right)$$

[1]On écrira $\forall s, \gamma(s) \in \mathcal{P}$ ou encore $\forall s, \overrightarrow{\gamma(s_0)\gamma(s)} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

1) Calculer $\gamma'(t)$ et montrer que la pente de la tangente est $-\frac{1}{\tan t}$. Autrement dit t est l'angle orienté entre les vecteurs $(0,1)$ et $\gamma'(t)$. Préciser le repère de Frenet $(T(t), N(t))$.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t + \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t + \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire $y'(t) = \frac{\cos^2 t}{\sin t}$ pour la deuxième composante de $\gamma'(t)$. La pente de la tangente est donc :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\tan t}.$$

Elle vaut 0 pour $t = \frac{\pi}{2}$ où l'expression valide est plutôt $\operatorname{cotan} t$. Puisque $\|\gamma'(t)\| = \left(\cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|\cos t|}{\sin t}$ le vecteur tangent à la courbe du repère de Frenet est défini pour $t \neq \frac{\pi}{2}$ et vaut en notant $\epsilon(t) = \frac{\cos t}{|\cos t|} \in \{-1, +1\}$ le signe de $\cos t$:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\sin t}{|\cos t|}\left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right) = \epsilon(\sin t, \cos t)$$

On complète pour avoir un repère orthonormé direct en $N(t) = \epsilon(-\cos t, \sin t)$

2) Etudier les variations de x et de y et faire un tracé sommaire de cette courbe. On montrera qu'elle admet l'axe des ordonnées comme asymptote, l'axe des abscisses comme axe de symétrie et qu'elle est régulière en dehors d'un point à préciser.

Je fais le tableau de variation sans commentaires avec l'étude de signes pour $x'(t), y'(t)$ déjà calculés :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	-	
$y'(t)$	$\|$	$+$	0	$+$	$\|$
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	$\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\|$

Il apparaît donc une asymptote verticale (pour $t \to \pm\infty$) qui est l'axe des ordonnées. Il y a un point singulier pour $t = \frac{\pi}{2}$ et la pente de la tangente éventuelle est la limite de $\frac{y(t)}{x(t)-1}$ ou pour éviter un calcul de D.L. mais en appliquant la règle de l'Hopital celle de $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \operatorname{cotan} t$ et on trouve donc une tangente horizontale. On peut pressentir une symmétrie à la vue d'une esquisse du tracé il est naturel d'utiliser le centre de symétrie de l'intervalle de définition $]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = x(t)$$

$$y(\pi - t) = \cos(\pi - t) + \ln(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})) = -\cos t + \ln\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} = -\cos t - \ln(\tan\frac{t}{2}) = -y(t).$$

On constate donc une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

3) Calculer les coordonnées $(0, y_0)$ du point d'intersection $A(t)$ de la tangente en $\gamma(t)$ à la courbe et de l'axe des ordonnées. Vérifier que la longueur du segment $(A(s)\gamma(s))$ est constante égale à 1.

L'équation de la tangente (dont on désigne par (X, Y) un point général est pour $t \neq \frac{\pi}{2}$:

$$Y - \cos t - \ln(\tan\frac{t}{2}) = \frac{1}{\tan t}(X - \sin t) = \frac{1}{\tan t}X - \cos t$$

En posant $X = 0$, on trouve l'ordonnée du point d'intersection cherché :

$$y_0 = \ln(\tan\frac{t}{2})$$

et la longueur du segment découpé sur la tangente est

$$\|(A(s)\gamma(s))\| = \|(0, \ln(\tan\frac{t}{2})) - \left(\sin t, \cos t + \ln\tan\frac{t}{2}\right)\| = 1$$

Pour $t = \frac{\pi}{2}$ le résultat est encore valable avec la position limite de la tangente.

On appelle cette courbe une tractrice parce que c'est la courbe décrite par un point B qui est lié par une longueur fixe à un point A qui lui-même parcourt une ligne droite. La vitesse de B est à tout instant dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Mécaniquement A exerce sur B une traction par un cable non élastique et le mouvement de A n'est perturbé par aucune autre force extérieure ni par une inertie propre.

4) Calculer la courbure k en fonction de t. Trouver les coordonnées du centre de courbure et en déduire en comparant au résultat de la question 3) une construction géométrique du centre de courbure.

Il s'agit d'une courbe plane et la courbure a un signe. Comme $\gamma''(t) = (-\sin t, -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t})$ on trouve d'abord

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = -\cos^2 t - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} - \sin^2 t + 1 = -\frac{1}{\tan^2 t}$$

L'expression de la courbure est

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = -\frac{1}{\tan^2 t}.\frac{\sin^3 t}{|\cos t|^3} = -|\tan t|.$$

Remarques 1) On a utilisé ici $\|\gamma'(t)\| = \frac{1}{|\tan t|}$ qui a déjà été calculé et qui vaut aussi $\frac{ds}{dt}$. On n'a pas besoin de l'abscisse curviligne explicitement.

2) On vérifie que la courbure tend vers $+\infty$ au point singulier, ce qui est le comportement attendu.

3) On pouvait aussi s'attendre au signe négatif car la concavité de la courbe suggère bien que le repère $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est indirect.

Comme $R(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{-1}{|\tan t|}$, le centre de courbure $C(t)$ est déterminé par la formule suivante où on notera la simplification de signe $\epsilon|\tan t| = \tan t$

$$\overrightarrow{\gamma(t)C(t)} = R(t)N(t) = \epsilon\frac{-1}{|\tan t|}(-\cos t, \sin t) = (\frac{\cos^2 t}{\sin t}, -\cos t)$$

ce qui donne les coordonnées suivantes pour $C(t)$

$$\begin{cases} x_C(t) = \sin t + \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ y_C(t) = \ln\tan\frac{t}{2} \end{cases}$$

On remarque que $A(t)$ et $C(t)$ ont la même ordonnée. On en déduit la construction suivante pour le centre de courbure : On trace la tangente (T) et la normale (N) à la courbe au point $\gamma(t)$ on prend le point d'intersection $A(t)$ de (T) avec l'axe des ordonnées et le centre de courbure est à l'intersection de (N) avec la droite passant par $A(t)$ parrallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3 :

1)Soit $t \to \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe gauche tracée sur la sphère de centre A et de rayon R. Montrer que le vecteur dérivé $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{A\gamma(t)}$.

La condition « être tracée sur la sphère » se traduit par l'identité :

$$\langle\overrightarrow{A\gamma(t)}, \overrightarrow{A\gamma(t)}\rangle = R^2$$

qui par dérivation implique $\langle\gamma'(t), \overrightarrow{A\gamma(t)}\rangle$ c'est à dire la relation d'orthogonalité annoncée

Réciproquement la propriété

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad \gamma'(t) \perp \overrightarrow{A\gamma(t)}$$

implique par intégration que $\langle \overrightarrow{A}\gamma(t), \overrightarrow{A}\gamma(t)\rangle$ est une constante C donc que la courbe paramétrée est tracée sur la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{C}$.

2) On suppose que la courbe de la question 1) est régulière paramétrée par l'abscisse curviligne s et on note $\overrightarrow{T(s)} = \gamma'(s)$, le vecteur unitaire tangent à la courbe et $\overrightarrow{N(s)} = \frac{\overrightarrow{T'(s)}}{\|\overrightarrow{T'(s)}\|}$ le vecteur normal situé dans la plan osculateur. Montrer qu'on a bien $\overrightarrow{T'(s)} \neq 0$ et démontrer la relation

$$\langle \overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{T(s)}\rangle + k(s)\langle \overrightarrow{A\gamma(s)}, \overrightarrow{N(s)}\rangle = 0.$$

En déduire que le rayon de courbure est en tout point au plus égal à R.

On a $T'(s) = k(s)N(s)$ et en dérivant la relation $\langle T(s), \overrightarrow{A}\gamma(s)\rangle = 0$ on trouve :

$$\langle T(s), T(s)\rangle + \langle k(s)N(s), \overrightarrow{A\gamma(s)}\rangle = 0$$

Comme $\langle T(s), T(s)\rangle = 1$ on observe d'abord que cette relation impose que $k(s) \neq 0$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$1 = \left|\langle k(s)N(s), \overrightarrow{A\gamma(s)}\rangle\right| \leq \|k(s)N(s)\| \cdot \|\overrightarrow{A\gamma(s)}\| = k(s)R$$

C'est à dire $R(s) = \frac{1}{k(s)} \leq R$.

3) La vérification de l'égalité $\overrightarrow{OM(t)} = \sin(\varphi(t))\overrightarrow{u(\theta)} + \cos(\varphi(t))\overrightarrow{k}$ est immédiate et puisque les vecteurs $\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux on obtient

$$\|\overrightarrow{OM(t)}\| = \sin^2(\varphi(t)) + \cos^2(\varphi(t)) = 1$$

et la courbe est bien tracée sur la sphère unité d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

4) On note $\frac{du}{d\theta} = \overrightarrow{v(\theta)} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ et le repère $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}, \overrightarrow{k})$ est orthonormé direct. Le calcul de $\frac{ds}{dt}$ est alors facilité par l'écriture vectorielle :

$$\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t))\overrightarrow{u(\theta(t))} + \sin(\varphi(t))\dot{\theta}(t)\overrightarrow{v(\theta(t))} - \dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t))\overrightarrow{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\| = \Big((\dot{\varphi}(t))^2\cos^2(\varphi(t)) + \sin^2(\varphi(t))(\dot{\theta}(t)]^2 + (\dot{\varphi}(t))^2\sin^2(\varphi(t))\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Conclusion :

$$\frac{ds}{dt} = \Big((\dot{\varphi}(t))^2 + \sin^2(\varphi(t))(\dot{\theta}(t)]^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

5) A la latitude de Bordeaux (45° et pas 90° !), on a $\sin(\varphi(t)) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, et si on remplace une drivée par un accroissement $\dot{\varphi}(t)$ devient un écart de latitude de $\Delta\varphi = 1°$ soit $\frac{2\pi}{360}$ en radians et environ 111 km. Par contre l'écart de longitude de 1° correspond aussi à $\Delta\theta = 1°$, donc en termes de longueur selon la formule de 4) à $\sin^2(\varphi)\Delta\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}\Delta\theta$ soit en km à $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 111 = 79km$. Une carte qui est carré en terme de degré sera au format proportionnel à $(1,\sqrt{2})$ qui est dailleurs le format A3,A4,A5...