UNIVERSITE D'ANGERS Mathematiques L2.

Devoir. Corrigé sur le web le 31/10/2014

On traitera au choix l'un des deux exercices 2 ou 3.

Exercice 1 : Déterminer la nature de chacune des 6 séries dont le terme général est donné ci-dessous :

1) $a_n = \cos \frac{1}{n}$

On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Comme le terme général ne tend pas vers zéro, la série diverge ("grossièrement").

$b_n = \frac{n^3+3n+2}{n^4-n^2+1}$

On a $\underset{n\to+\infty}{\sim} b_n = \frac{1}{n}$. Par comparaison à la série de Riemann à termes positifs et divergente $\sum \frac{1}{n}$ on en conclut que la série $\sum b_n$ diverge.

$c_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1$

En utilisant le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on trouve :

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

et ainsi $c_n = \frac{(-1)^n}{n} + \tilde{c}_n$ avec $\tilde{c}_n = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Comme la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème des séries alternées et $\sum \tilde{c}_n$ converge par comparaison à une série de Riemann à termes positifs convergente, on en déduit que la série $\sum c_n$ converge.

$d_n = \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^n.n!}$

On applique la règle de D'Alembert ou règle du quotient. Les contributions de chacun des facteurs qui constituent d_n sont multipliées entre elles :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}{3(n+1)}$$

et on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2}{3} < 1$, ce qui implique que la série $\sum d_n$ converge.

$e_n = \frac{\ln(n)}{n(n+1)}$

On a $n^{\frac{3}{2}} e_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $n^{\frac{3}{2}} e_n$ est donc bornée par une constante M et l'inégalité $e_n \leq \frac{M}{n^{\frac{3}{2}}}$ montre que la série $\sum e_n$ converge.

Remarque : On aura remarqué qu'une erreur de coupé-collé a abouti à proposer l'étude d'une série f_n identique à la précédente. L'intention de l'auteur du problème était de placer ici une série absolument convergente du genre $f_n = \frac{n \cos n+1}{n^3+n+1}$

Exercice 2 : 1) Déterminer les branches infinies et préciser leur nature pour la courbe paramétrée

$$x = \frac{t}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$$

Il y a quatre valeurs de t à prendre en considération : $-\infty, -1, 1, +\infty$. En rassemblant les cas $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$, cela donnera en fait trois asymptotes avec les comportements de part et d'autre à regarder à chaque fois. Résumons dans un tableau les limites de x et y pour chacune de ces valeurs :

t	$-\infty$	$(-1)^-$	$(-1)^+$	1^-	1^+	$+\infty$
$x(t)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$y(t)$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

<u>Branche 1</u> : quand $t \to -\infty$, on trouve l'asymptote verticale $x = 0$ c'est à dire l'axe des ordonnées. Comme $x(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, la courbe est à gauche de son asymptote.

<u>Branche 1 bis</u> : de la même façon quand $t \to +\infty$, la droite $x = 0$ est encore asymptote et la courbe est à droite de l'axe des y pour $t \to +\infty$.

<u>Branche 2</u> : quand $t \to -1$ on trouve l'asymptote horizontale $y = -\frac{1}{2}$. Le signe de la limite de x à gauche et à droite de $t \to -1$ est justifié par

$$x(t) \underset{t\to-1}{\sim} \frac{t}{t-1}_{|t=-1} \times \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t+1}$$

De même l'équivalent :

$$y(t) + \frac{1}{2} = \frac{t^2}{t-1} + \frac{1}{2} = \frac{(t+1)(2t-1)}{2(t-1)} \underset{t\to-1}{\sim} \frac{3}{4}(t+1)$$

montre que la courbe est au dessus (resp. au dessous) de cette asymptote quand $t \to (-1)^+$ (rep. $t \to (-1)^-$).

<u>Branche 3</u> : quant $t \to 1$, on trouve que $\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1)$ tend vers 2. On a

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2(t+1) - 2t}{t^2-1} = \frac{t(t-1)(t+2)}{t^2-1} = \frac{t(t+2)}{t+1}$$

Donc en posant $t = 1 + h$ et en effectuant un DL facile :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{3 + 4h + h^2}{2+h} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}h + o(h)$$

Ce qui établit l'existence de l'asymptote oblique d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$, la courbe étant au dessus (resp. au dessous) de l'asymptote quand $t \to 1$ par valeurs supérieures (resp. inférieures).

On indiquera sur un dessin l'allure des branches infinies et leur position relative à une asymptote éventuelle.

Voir sur le dessin à la fin du corrigé de l'exercice, et les commentaires qui suivent.

2) Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et terminer le dessin en donnant l'allure complète de la courbe.

Le domaine de définition de $t \to (x(t), y(t))$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculons les dérivées :

$$x'(t) = \frac{t^2 - 1 - 2t^2}{t^2 - 1} = -\frac{1 + t^2}{(t^2 - 1)^2} < 0$$

$$y'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

On en tire le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		-	$\|\|$	-	$\|$	-	$\|\|$	-	$\|$	-	
$y'(t)$		$+$		$+$	0	-	$\|\|$	-	0	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

3) (Facultatif). Trouver $t_1 \neq t_2$, tels que $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$. Expliquer d'abord à partir du dessin pourquoi on recherche une telle paire de valeurs distinctes de t.

Le dessin met en évidence un point de croisement qui permet de soupçonner un point double pour des valeurs du paramètres qui satisfont les inégalités $t_1 < -1 < 0 < t_2 < 1$. On suppose ici que $t_1 < t_2$. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1} \\ \frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1} \end{cases}$$

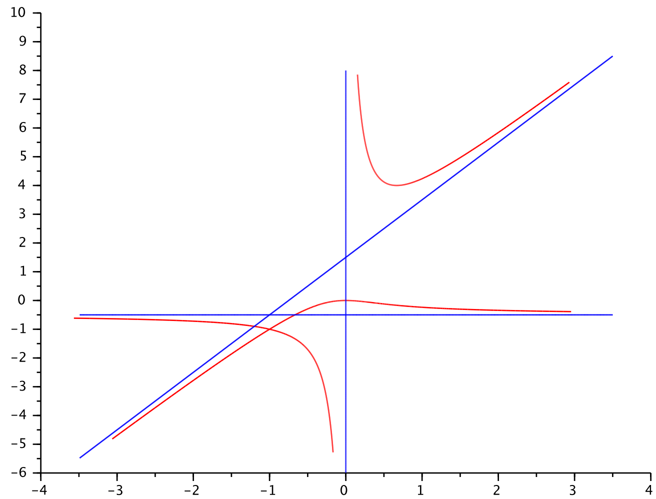
sous la condition $t_1 \neq t_2$ qui permet de simplifier par $t_2 - t_1$. On trouve en chassant les dénominateurs, en simplifiant par $t_2 - t_1$ et en posant $S = t_1 + t_2, P = t_1 t_2$:

$$\begin{cases} t_1(t_2^2 - 1) - t_2(t_1^2 - 1) = 0 \\ t_1^2(t_2 - 1) - t_2^2(t_1 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 t_2(t_2 - t_1) + t_2 - t_1 = 0 \\ t_1 t_2(t_1 - t_2) + (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P + 1 = 0 \\ -P + S = 0 \end{cases}$$

Ainsi $P = S = -1$, et il est bien connu que t_1, t_2 sont les deux solutions de l'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$, donc ici $X^2 + X - 1$.

<u>Conclusion</u> : puisque on a supposé que $t_1 < t_2$ on trouve $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Par un calcul élémentaire le point double est en

$$M(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = M(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = (-1,-1)$$



Tracé de la courbe

On reconnaitra les trois asymptotes $x = 0$ verticale, $y = -\frac{1}{2}$ horizontale, et $y = 2x + \frac{3}{2}$ oblique. L'axe des x légèrement au dessus de l'asymptote horizontale n'a pas été figuré. On remarque aussi que scilab a utilisé un repère non orthonormé. Ainsi le dessin est "tassé" verticalement à l'image de l'asymptote de pente 2.

Pour suivre le tracé dans le sens des t croissants, et controler la position indiquée dans la question 1 de la courbe par rapport aux asymptotes il est conseillé de flécher le dessin en notant qu'il part pour t venant de $-\infty$ de l'asymptote verticale en bas vers l'asymptote horizontale, quand $t \to (-1)^-$. Il repart de la même asymptote coté droit pour rejoindre l'asymptote oblique en bas à gauche quand t parcourt $]-1,+1[$, etc... pour finir à la verticale.

N.B. Il serait judicieux de chercher aussi un point d'inflexion pour une valeur de t dans $]-1,0[$. C'est laissé en exercice. Résoudre $\left(\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)' = 0$. On peut factoriser $t^2 - 1$ dans le numérateur de l'expression obtenu et on trouve pour le point d'inflexion une valeur $\alpha \in]-1,0[$ qui est l'unique racine de l'équation $t^3 + 3t + 1$.

Exercice 3 :

On considère la courbe Γ définie par les équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

1) Étudier la courbe Γ et la tracer. On examinera en particulier la nature des branches infinies ou des points d'arrêt, en particulier le comportement de la pente au point d'arrêt lorsque t tend vers $\pm\infty$, et on donnera la tangente au point de paramètre $t = 1$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et pour établir les variations de $x(t)$ et $y(t)$ on calcule :

$$x'(t) = \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot (3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$y'(t) = \frac{6t \cdot (1+t^3) - 3t^2 \cdot (3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Ainsi la dérivée de x s'annule en $t_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \simeq 0.794$, et $y'(t)$ s'annule en $t_2 = \sqrt[3]{2} = \frac{1}{t_1} \simeq 1.260$

Nous obtenons le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		0		t_1		t_2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\Vert$	$+$	3	$+$	0	-	-1	-	
$y'(t)$		-	$\Vert$	-	0	$+$	$2t_1$	$+$	0	-	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2t_1$	$\searrow$	t_2	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2t_1^2$	$\nearrow$	t_2^2	$\searrow$	0

On observe que pour $t \to \pm\infty$, la courbe présente un point d'arrêt qui est en $(0,0)$, donc égal à $M(0)$. On a donc aussi une sorte de point double atteint pour $t = 0$ et aussi quand $t \to \pm\infty$.

On a $\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ ce qui signifie une tangente verticale au point d'arrêt.

Etude de la branche infinie. On a $\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t\to-1}{\longrightarrow} -1$ et on considère donc, en posant $t = -1+h$:

$$y(t) + x(t) = \frac{3t(1+t)}{1+t^3} = \frac{3t}{1-t+t^2} = \frac{-3+3h}{3-3h+h^2} = \frac{-1+h}{1-(h-h^2/3)}$$

Un DL au voisinage de $h = 0$ donne :

$$y(t) + x(t) = (-1+h)(1+(h-h^2/3) + h^2 + o(h^2) = -1 + \frac{2}{3}h^2 + o(h^2)$$

Il y a donc une asymptote d'équation $y = x - 1$ et la courbe est au dessus de son asymptote des deux cotés.

Au point de paramètre $t = 1$, situé entre t_1 et t_2 et qui ne figure pas sur le dessin on trouve :

$$x(1) = y(1) = \frac{3}{2}, \quad x'(1) = -\frac{3}{4}, y'(1) = \frac{3}{4},$$

Le point est situé sur la première diagonale avec une tangente parallèle à le deuxième diagonale. Son placement aide à voir l'allure du tracé de la courbe quit suit, conformément au tableau de variation et aux éléments particuliers. Voir ce tracé à la fin du corrigé. Le dessin permet de deviner la symétrie mise en évidence dans la question suivante.

2) Pour $s = 1/t$, exprimer $x(s)$ et $y(s)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Quelle symétrie ce changement de paramètre met-il en évidence ?

On trouve

$$x(s) = \frac{3/t}{1 + 1/t^3} = \frac{3t^3}{t(t^3 + 1} = y(t)$$

$$y(s) = \frac{3/t^2}{1 + 1/t^3} = \frac{3t^3}{t^2(t^3 + 1} = x(t)$$

Ainsi $M(1/t) = (y(t), x(t))$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la première bissectrice. Ce calcul est valable pour tout $t \neq 0$, mais on retrouve aussi en faisant tendre t vers l'infini que le point d'arrêt est le symétrique de $M(0)$, c'est à dire $M(0)$ lui-même.