

Série d'exercices N°4 : Simulation de variables aléatoires

Exercice 1

Soit X une v.a. de loi discrète $p_0\delta_{\{x_0\}} + p_1\delta_{\{x_1\}} + \dots + p_n\delta_{\{x_n\}}$, où $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une probabilité sur l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. On veut simuler X à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a. $Y = x_0\mathbb{1}_{\{U < p_0\}} + x_1\mathbb{1}_{\{p_0 \leq U < p_0 + p_1\}} + \dots + x_n\mathbb{1}_{\{p_0 + \dots + p_{n-1} \leq U \leq 1\}}$ a même loi que X .

Corrigé Les deux variables prennent les mêmes valeurs x_0, \dots, x_n avec la même loi de probabilité :

$$P(X = x_k) = p_k \text{ et } P(Y = x_k) = P(p_0 + \dots + p_{k-1} \leq U < p_0 + \dots + p_k) = p_k.$$

Exercice 2 Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres N et p : $P(X = n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$, $n = 0, 1, \dots, N$. On veut simuler la loi de X à partir de N v.a. indépendantes U_1, \dots, U_N de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a. Y égale au nombre de U_i qui sont inférieurs à p suit la même loi que X .

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = 3x^2$ sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs.

1. Calculer sa fonction de répartition.
2. En déduire un algorithme de simulation de cette v.a..

Exercice 4 Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que l'on peut simuler la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ en posant $X = -\frac{\log U}{\lambda}$.

Exercice 5 Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que la v.a.

$$Y = \mathbb{1}_{\{X_1 \leq 1 < X_1 + X_2\}} + 2\mathbb{1}_{\{X_1 + X_2 \leq 1 < X_1 + X_2 + X_3\}} + \dots + n\mathbb{1}_{\{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}\}} + \dots$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n \geq 0$.

Exercice 6 Soit T une v.a. exponentielle d'espérance 1, et Θ une v.a. uniformément distribuée à valeurs dans $[0, 2\pi[$. On suppose T et Θ indépendantes. On définit :

$$X = \sqrt{2T} \cos(\Theta) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2T} \sin(\Theta).$$

1. Montrer que X et Y ont même loi et sont indépendantes.

2. Quelle est cette loi commune ?

3. Soient U_1 et U_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi du couple de v.a.

$$(\sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)) ?$$

Exercice 7 (Méthode du rejet.) Soit X une v.a. dont la densité f est continue et à support compact inclus dans l'intervalle $[a, b]$. Soit k un réel tel que $k \in \sup_x f(x)$. On considère une v.a. $P = (U, V)$ uniformément distribuée dans le rectangle $[a, b] \times [0, k]$. On désigne par A la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f .

On cherche à simuler la loi de X . Pour ceci, on effectue des tirages successifs $P_1 = (U_1, V_1), \dots, P_n = (U_n, V_n), \dots$ selon la loi de P et l'on définit la v.a. X de la manière suivante : si le point $P_i = (U_i, V_i)$ se trouve dans A , alors on pose $Y = U_i$, sinon on tire à nouveau selon la loi de P et indépendamment des tirages précédents.

1. Soit N le nombre de tirages nécessaires pour atteindre A . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = \frac{\text{aire}(A)}{k(b-a)} \left(\frac{k(b-a) - \text{aire}(A)}{k(b-a)} \right)^{n-1}.$$

En déduire que par ce procédé, on atteint l'ensemble A au bout un nombre de tirages presque sûrement fini.

2. Montrer que Y peut se définir ainsi :

$$\begin{aligned} Y &= U_1 \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \in A\} \\ Y &= U_2 \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A, P_2 \in A\} \\ &\dots \\ Y &= U_n \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A, \dots, P_{n-1} \notin A, P_n \in A\} \\ &\dots \end{aligned}$$

(En particulier, vérifier que ceci définit bien une v.a.)

3. Montrer que Y a même loi que X .

Exercice 8 Soit la loi de probabilité sur $[-1, 1]$ définie par la fonction de densité f

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

Déterminer une méthode de simulation par rejet de f à partir de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 9 Soit la loi de probabilité sur $[0, +\infty[$ définie par la fonction de densité f

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{\left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right)} \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}(x)$$

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 2e^{-x}$. En déduire une méthode de simulation par rejet de f à partir de la loi exponentielle de paramètre 1.