

Corrigé du devoir

Exercice 1 : Rappelons que pour un réel x , on note $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = -\min(x, 0)$. Remarquons que $|f_n(x) - f(x)| = (f_n(x) - f(x))^+ + (f_n(x) - f(x))^-$ et $f_n(x) - f(x) = (f_n(x) - f(x))^+ - (f_n(x) - f(x))^-$. Il suffit alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) &= \int_X (f_n(x) - f(x))^+ d\mu(x) + \int_X (f_n(x) - f(x))^- d\mu(x) \\ &= \int_X f_n(x) - f(x) d\mu(x) + 2 \int_X (f_n(x) - f(x))^- d\mu(x) \\ &= \int_X f_n(x) - f(x) d\mu(x) + 2 \int_X (f(x) - f_n(x))^+ d\mu(x). \end{aligned}$$

Puisque $f_n \geq 0$, μ -p.p., pour tout n , on a $0 \leq (f(x) - f_n(x))^+ \leq |f(x)|$, μ -p.p., pour tout n . D'autre part, puisque (f_n) converge μ -p.p. vers $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue que le second terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus converge vers 0. Enfin puisque

$$\lim_n \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

le premier terme converge aussi vers 0.

Exercice 2 : 1) Pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, la fonction génératrice de N_j vaut $G_{N_j}(s) = e^{\theta(s-1)}$, $s \in [0, 1]$. Par conséquent celle de $N_1 + \dots + N_n$ vaut $G_{N_1 + \dots + N_n}(s) = e^{n\theta(s-1)}$, $s \in [0, 1]$. Puisque la fonction génératrice caractérise la loi de probabilité, on en déduit que $N_1 + \dots + N_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\theta$.

2) Notons $[x]$ la partie entière par valeur inférieure de tout réel x . Pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(N \leq nx) = \mathbb{P}(N \leq [nx]) = e^{-n\theta} \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(n\theta)^k}{k!}.$$

D'après la loi des grands nombres (dont on vérifie facilement les hypothèses), $(N_1 + \dots + N_n)/n$ converge p.s. et donc en loi vers $\mathbb{E}(N_1) = \theta$. D'après la question 1., pour tout n , $(N_1 + \dots + N_n)/n$ a même loi que N/n . Par conséquent N/n converge en loi vers la v.a. constante égale à θ . En appliquant un théorème du cours, on déduit de cette convergence en loi que lorsque n tend vers $+\infty$, la fonction de répartition $x \mapsto \mathbb{P}(N \leq nx)$ de N/n converge vers la fonction de répartition $x \mapsto \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(x)$ de la v.a. constante égale à θ en tout point où cette dernière est continue, d'où le résultat.

3) La fonction $x \mapsto xe^{-\lambda_0 x}$ étant bornée sur \mathbb{R}_+ , pour tout $\lambda_0 > 0$, on a $\mathbb{E}(Xe^{-\lambda_0 X}) < +\infty$. De plus $Xe^{-\lambda X} \leq Xe^{-\lambda_0 X}$, pour tout $\lambda \in]\lambda_0, +\infty[$. Le fait que φ soit dérivable et de dérivée égale à $\varphi'(\lambda) = -\mathbb{E}(Xe^{-\lambda X})$ sur $]\lambda_0, +\infty[$, pour tout $\lambda_0 > 0$, se déduit alors du théorème de dérivabilité sous le signe intégrale. La dérivabilité de φ sur $]0, +\infty[$ en découle directement. On montre alors par récurrence que pour tout $k \geq 1$, φ est k fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\varphi^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \mathbb{E}(X^k e^{-\lambda X}), \quad \lambda > 0.$$

Soit $G_n(\theta) = e^{-n\theta} \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(n\theta)^k}{k!}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}(G_n(X)) = \mathbb{E} \left(e^{-nX} \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(nX)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{1}{k!} n^k \mathbb{E}(X^k e^{-nX}) = \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \varphi^{(k)}(\lambda).$$

Mais d'après la question 2), si x est un point de continuité de F alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et par conséquent $G_n(X)$ converge presque sûrement vers $\mathbb{I}_{]-\infty, x]}(X)$. Puisque $|G_n(X)| \leq 1$, d'après le théorème de convergence dominée, lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\mathbb{E}(G_n(X)) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_{]-\infty, x]}(X)) = F(x).$$