

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

D. Schaub
Département de Mathématiques
Université d'Angers
Année 2009-2010

11 décembre 2009

Remarque : ceci n'est pas un cours, mais un bref résumé des notions vues et explicitées dans ce cours.

1 Introduction au raisonnement mathématique

Les mathématiques constituent un ensemble d'affirmations *déduites logiquement* les unes des autres à partir de *vérités* admises au départ : des **axiomes**, vérités qu'on suppose ou montre non contradictoires.

Normalement, on devrait donc commencer par énoncer ces “vérités” de base et, à partir de là, énoncer et utiliser les seuls résultats obtenus à partir d'une **démonstration** rigoureuse.

Evidemment, on progresse par étapes, c'est-à-dire en général par “années scolaires” et on suppose que les résultats qu'on utilisera une année donnée ont été effectivement prouvés dans une année antérieure.

Une autre façon de procéder est d'admettre comme prouvés des résultats, sans en avoir lu *personnellement* la ou les démonstration(s). C'est ce que nous faisons la plupart du temps dans l'enseignement des mathématiques, essentiellement par manque de temps. Mais, généralement, on indique des références où trouver ces démonstrations afin que chacun puisse se convaincre par lui-même de la justesse du raisonnement.

Tout ceci pour insister sur la nécessité absolue en mathématiques de **prouver** les différents résultats. Malheureusement, au fil des années, et pour des raisons pas toujours bonnes, on a évacué la partie raisonnement de l'enseignement secondaire pour ne se consacrer qu'aux résultats, et mieux encore si ceux-ci se résument à une ou des formules.

C'est la grosse différence qu'il va y avoir avec l'enseignement des mathématiques dans le secondaire et à l'université.

Bien sûr, il ne sera pas question de **tout** démontrer - faute de temps le plus souvent, mais aussi, parfois, pour des raisons de difficulté un peu trop importante. Dans ces cas, nous dirons clairement que nous ADMETTRONS ces résultats. Cela signifie que nous les

considérerons comme ayant été **démontrés** par d'autres et, par conséquent, que nous les tiendrons pour **vrais**.

Exemple 1.1 Dans la page 1 du cours de mathématiques, on dit “Nous admettons l'existence et l'unicité de l'ensemble \mathbb{R} ... etc.” Vous pouvez cependant vous référer à nombre d'ouvrages de première année où l'on vous dit comment on construit un tel ensemble avec les propriétés requises. Nous admettons donc son existence et nous allons nous attacher à utiliser ses propriétés; nous mettons donc l'accent sur les propriétés et donc leur compréhension et leur connaissance.

1.1 Notions générales

Une *assertion* est une affirmation à laquelle on peut attribuer la valeur vraie ou fausse. Exemple : *Tous les entiers naturels n vérifient $n^2 \geq 4$* est une assertion même si elle est fausse (pourquoi?).

Les *connecteurs* **et** et **ou** sont des moyens de produire une nouvelle assertion à partir de deux autres.

Exemple 1.2 1. Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. Si un entier $x \in \mathbb{N}$ (expliquer la signification de cette écriture) vérifie l'assertion *x est pair et x est multiple de 3*, que peut-on dire de x ?

2. Dans une classe, il y a des élèves qui suivent des cours d'anglais et d'autres des cours de russe. Il y des élèves qui suivent les cours d'anglais ou (exclusif) de russe et des élèves qui suivent les deux. Utiliser une représentation ensembliste pour “matérialiser” ces assertions.

Il y a des *quantificateurs* qui sont :

- *quelque soit* noté \forall
- *il existe* noté \exists .

Nombre d'énoncés mathématiques utilisent des quantificateurs.

Exercice 1.1 *Ecrire à l'aide d'un quantificateur la phrase : “Tous les exercices de maths sont faciles”. La négation de cette phrase est-elle : “Aucun exercice de maths n'est facile”, “Tous les exercices de maths sont difficiles”, “Il existe un exercice de maths qui n'est pas facile”, “Il existe des exercices de maths qui ne sont pas faciles”.*

Exercice 1.2 *Écrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes*

\mathcal{P} : *tous les guichets sont fermés certains jours*

\mathcal{Q} : *certaines jours tous les guichets sont fermés*

Exemple : (\mathcal{P}) tous les guichets sont fermés certains jours : s'écrira $\forall g \in G, \exists j \in J, g$ est fermé le jour j .

Ecrire leur négation en langage courant et avec des quantificateurs.

Exercice 1.3 *On note P l'ensemble des portes d'un lycée qui sont munies d'une serrure et C l'ensemble des clés que possède le concierge de ce lycée. Quel est le sens en français courant et concret des assertions mathématiques suivantes :*

- $\forall p \in P \exists c \in C, c$ ouvre p
- $\exists c \in C \forall p \in P, c$ ouvre p .

1.2 Les déductions

L'**implication**, notée \Rightarrow est un symbole très important dont il faut bien comprendre le sens.

Si P et Q sont deux assertions, $P \Rightarrow Q$ (qui se lit P implique Q) est la propriété *NON P ou Q* .

En particulier, $P \Rightarrow Q$ peut être vraie ou faux, il s'agit d'une assertion. Cependant, par abus de langage, il arrive à tout le monde de dire "On a $P \Rightarrow Q$ " ou pire, " si $P \Rightarrow Q$, alors"

Condition nécessaire, condition suffisante

Si P et Q sont des assertions, alors

- Q est une condition nécessaire de P si Q est vraie lorsque P est vraie, autrement dit si $P \Rightarrow Q$.

- Q est une condition suffisante de P si P est vraie lorsque Q est vraie, autrement dit si $Q \rightarrow P$.

On utilise souvent dans le langage courant, les mots "si", "seulement si", "si et seulement si".

Contraposée et réciproque

Il ne faut pas confondre la contraposée d'une implication avec l'implication réciproque.

Exercice 1.4 *En langage courant. Quelle est la contraposée de "S'il pleut, le sol est mouillé" ? Quelle en est la réciproque ?*

1.3 Règles de raisonnement

Il y a trois règles qu'on applique tout le temps :

- si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors l'assertion Q est vraie.

Exemple [Détail] • Si P est vraie, si $P \Rightarrow Q$ est vrai, si $Q \Rightarrow R$ est vrai, alors R est vraie (c'est ce qu'on appelle un syllogisme).

- Le raisonnement par dichotomie ou séparation des cas : on essaye un cas puis l'autre. Le raisonnement par séparation des cas consiste à énumérer les cas possibles.

Exercice 1.5 *Trois frères Alfred, Bernard et Claude ont des crayons de couleur différente bleu, rouge et vert. De plus, les assertions suivantes sont vraies :*

1. *Si le crayon d'Alfred est vert, alors le crayon de Bernard est bleu ;*
2. *Si le crayon d'Alfred est bleu, alors le crayon de Bernard est rouge ;*
3. *Si le crayon de Bernard n'est pas vert, alors le crayon de Claude est bleu*
4. *Si le crayon de Claude est rouge, alors le crayon d'Alfred est bleu.*

Que peut-on conclure sur la couleur respective des crayons d'Alfred, Bernard et Claude ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

2 Autres types de raisonnement

2.1 le Principe de récurrence

Rappels sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} . Il importe de faire la distinction entre les nombres, qui désignent un "contenu", une "quantité" et leurs représentations.

On peut introduire les entiers naturels de plusieurs façons. Par exemple, à partir des assertions "élémentaires" (acceptées comme vraies), les **axiomes de Peano**. Ceux-ci sont au nombre de cinq :

1. l'élément appelé zéro et noté : 0, est un entier naturel.
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté (n) ou S_n .
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à \mathbb{N} .

En fait, on ne construira pas un tel ensemble, on en admet l'existence et on notera par 1 le successeur de 0, 2 celui de 1, etc. On remarque au passage qu'il y d'autres axiomatiques qui permettent de mener à \mathbb{N} , par exemple, l'axiomatique ordinale.

Le premier axiome permet de poser que l'ensemble des entiers naturels n'est pas vide, le troisième qu'il possède un premier élément et le cinquième qu'il vérifie le principe de récurrence. Ce qui se traduit de la manière suivante :

On a une assertion $P(n)$ qu'il faut d'abord bien énoncer. Pour vérifier que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

1. on vérifie que $P(n_0)$ est vrai pour un entier n_0 .
 2. on montre que l'assertion " $P(n)$ implique $P(n + 1)$ " est vraie pour $n \geq n_0$.
- (On dit que l'assertion $P(n)$ est héréditaire pour $n \geq n_0$.)

On en conclut alors, par le principe de récurrence ci-dessus énoncé, que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 2.1 Mettez 543 dominos sur une table verticalement et proches les uns des autres. Je désire montrer que si je fais tomber le premier domino sur le second, le 543-ième tombe (et tous les dominos tombent!) :

Propriété $P(n)$: le n -ième domino tombe sur le $n + 1$ -ième domino.

L'assertion $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ est vraie : en effet si le n -ième domino tombe vers $n + 1$ -ième domino, il le fait tomber sur le suivant.

D'autre part $P(1)$ est vraie car je fais tomber le premier domino sur le second.

Comme $P(1)$ et $(P(1) \Rightarrow P(2))$ sont vraies, $P(2)$ est vraie.

Comme $P(2)$ et $(P(2) \Rightarrow P(3))$ sont vraies, $P(3)$ est vraie.

.....

Comme $P(542)$ et $(P(542) \Rightarrow P(543))$ sont vraies, $P(543)$ est vraie et le 543-ième domino est tombé.

Remarque : Que peut-on dire si on avait fait tomber le premier domino de l'autre côté ?

Une fois construit l'ensemble \mathbb{N} , on définit des opérations dessus : l'addition est définie de manière récurrente par $n + 0 = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n + s(m) = s(n + m)$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. On procède de manière analogue pour définir une multiplication.

Ceci fait reste la question d'une représentation convenable des éléments de \mathbb{N} . Historiquement, il s'est passé plusieurs millénaires avant que nous ne soyons parvenus à les représenter d'une manière suffisamment "pratique". Même si d'autres représentations ont été utilisées, la façon qui s'est imposée est basée sur des notions d'unités, de "dizaines", de "centaines", etc., encore faut-il s'entendre sur le sens qu'on y donne, puisque cela n'a un sens qui correspond bien à ces appellations qu'en *base décimale*. En fait, en base 10, on représente un nombre entier sous la forme

$$n = a_p a_{p-1} \cdots a_0$$

où $0 < a_p \leq 9$ et $0 \leq a_i \leq 9$, $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}$, ce qui signifie que

$$n = a_p \times 10^p + a_{p-1} \times 10^{p-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0.$$

Remarque : on peut écrire en base quelconque, par exemple, en base 2. Exercice : préciser ce que cela veut dire.

Exercice 2.1 Dans les cas suivants, l'assertion $P(n)$ est-elle héréditaire pour tout entier n ? $P(1)$ est-elle vraie ? $P(2)$ est-elle vraie ? $P(876)$ est-il vrai ?

1. $P(n) : n + 1 < n$
2. $P(n) : n^3 \leq n^2$
3. $P(n) : 10^n - (-1)^n$ est divisible par 11
4. $P(n) : 2^n \geq n^2$

Exercice 2.2 Montrer l'inégalité : $2^n \geq n^2$. Que pensez-vous de l'énoncé ? Précisez-le et proposez un énoncé correct. Démontrez-le.

Exercice 2.3 Trouver la faute dans la démonstration suivante de l'assertion "Tous les crayons de couleur d'une même boîte ont la même couleur".

"Démonstration" : S'il n'y a qu'un crayon de couleur dans la boîte, c'est vrai. Prenons comme hypothèse de récurrence : s'il y a k crayons de couleur dans une boîte, ils ont la même couleur. Prenons $k+1$ crayons de couleur. On en enlève un, le crayon A. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur.

On remet A et on en enlève un autre, B. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur que A et aussi la même couleur que B.

Donc ils ont tous la même couleur.

2.2 Le raisonnement par l'absurde

Le *raisonnement par l'absurde* consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis par des déductions logiques (utilisant l'hypothèse) à aboutir à une absurdité, c'est-à-dire une assertion que l'on *sait* être fausse.

Rappels sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} et l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} . Nous avons admis au paragraphe précédent la construction de \mathbb{N} et avons défini des opérations d'addition et de multiplication. Rappelons-en les propriétés (associativité, commutativité, existence d'un neutre et de symétriques pour $+$, lesquelles pour \times ?).

Construction de \mathbb{Z} : on étend \mathbb{N} en lui adjoignant formellement un ensemble $-\mathbb{N}^* = \{-1, -2, \dots\}$ (ie. on considère l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\} \supset \mathbb{N}$) et des règles qui permettent d'étendre les deux opérations d'addition et de multiplication. Ainsi, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, on pose : si $n, m \geq 0$, $n + m$ est l'entier de \mathbb{N} donné par l'addition dans \mathbb{N} et d'autre part $n + (-m) = n - m \in \mathbb{N}$ si $n > m$ et $-(m - n)$ où $m - n \in \mathbb{N}$ sinon.

De même, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \times m$ est le nombre entier naturel défini par la multiplication dans \mathbb{N} et $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $(-n) \times m = n \times (-m) = -(n \times m)$ et $(-n) \times (-m) = n \times m$.

L'addition a encore les propriétés d'associativité, de commutativité, d'existence d'un élément neutre 0 et, de plus, pour tout élément $x \in \mathbb{Z}$, il existe un élément $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0 = y + x$. On dit que tout élément admet un symétrique, on dira un *opposé*.

De même, la multiplication dans \mathbb{Z} a toutes ces propriétés sauf la dernière. En effet, le seul élément de \mathbb{Z} qui admette un symétrique pour la multiplication est 1, on parle d'*inverse*.

Ce dernier "défaut" donne envie de construire un ensemble "plus gros", càd. contenant \mathbb{Z} , tel que tout élément (non nul) admette un inverse.

Pour ce faire, on considère l'ensemble *produit* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (Attention, il s'agit d'une NOTATION!!!) dont les éléments sont les couples (a, b) , $a, b \in \mathbb{Z}$ ie.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On va mettre une règle d'identification de deux couples :

$$(a, b) \equiv (a', b') \text{ si } ab' = a'b.$$

Il faut vérifier que cela ne contient pas de "contradiction". Par exemple, le couple (a, b) est identique à lui-même, si $(a, b) \equiv (a', b')$ alors $(a', b') \equiv (a, b)$; enfin, si (a, b) est identique à (a', b') et (a', b') à (a'', b'') , alors on doit avoir que (a, b) est identique à (a'', b'') . Toutes ces choses peuvent être vérifiées facilement (exo).

Pour simplifier, nous NOTERONS \mathbb{Q} l'ensemble des couples (a, b) modulo ces identifications et $\frac{a}{b}$ le couple (a, b) (on remarque alors que si (a, b) est identique à (a', b') , alors $\frac{a}{b}$ est identifié à $\frac{a'}{b'}$, autrement dit, ces deux éléments sont le même élément de \mathbb{Q} , ie. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$).

Il reste à étendre les opérations par :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ et } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(en remarquant qu'il faut vérifier que c'est bien cohérent avec les identifications!!! (exo))

Exercice 2.4 1. Montrer que \mathbb{Z} se plonge naturellement dans \mathbb{Q} , en respectant les opérations.
 2. Montrer que, dans \mathbb{Q} muni de cette multiplication, tout élément non nul admet un symétrique (inverse).

Exercice 2.5 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Supposez pour cela que, au contraire, $\sqrt{2}$ est rationnel et écrivons-le alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ des entiers premiers entre eux. Montrer que cela conduit à une absurdité.

Parfois on traite de raisonnement “par l'absurde”, un simple raisonnement utilisant la contraposée. Par exemple,

* on veut démontrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, * on suppose “non Q ”, * on finit par démontrer “non P et on se dit en contradiction avec P . Mais P ne nous a pas servi. Il n'y a donc pas de contradiction mais une simple contraposée.

2.3 Les nombres réels

On se contentera d'une idée de construction à partir de \mathbb{Q} .

Nous avons vu que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, mais la question était alors posée de manière un peu incorrecte puisque nous avons en quelque sorte admis l'existence de “quelque chose” dont le “carré” était 2.

La question est donc de savoir si on peut construire, à partir de \mathbb{Q} , un ensemble dont l'un des éléments pourrait être appelé $\sqrt{2}$. Malheureusement, la construction n'est pas aussi simple que le passage de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} .

En mathématiques, une coupure de Dedekind d'un ensemble totalement ordonné E est un couple (A, B) de sous-ensembles de E , lesquels forment à eux deux une partition de E , et où tout élément de A est inférieur à tout élément de B .

D'une certaine façon, une telle coupure conceptualise quelque chose qui se trouverait « entre » A et B , mais qui ne serait pas forcément un élément de E .

Les coupures de Dedekind furent introduites par Richard Dedekind comme moyen de construction de l'ensemble des nombres réels (en présentant de manière formelle ce qui se trouve « entre » les nombres rationnels).

Définition 2.1 Une coupure de Dedekind d'un ensemble totalement ordonné E se définit par un couple (A, B) , où $A \subset E$ et $B \subset E$, et tels que :

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cup B = E$
4. $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$
5. A ne possède pas un plus grand élément.

Les points 1, 2 et 3 posent que A et B réalisent une partition de E . Par conséquent, la définition de l'un détermine entièrement l'autre.

Le point 4 pose le partage des éléments de E dans ces deux parties. Il est possible de montrer que ce point équivaut à :

$$* \forall x \in E, (a \in A \wedge x \leq a \Rightarrow x \in A) \text{ et } * \forall y \in E, (b \in B \wedge y \geq b \Rightarrow y \in B).$$

Le point 5 permet d'associer à chaque élément de E , une coupure de Dedekind unique. Ainsi, si $x \in E$, on lui associe la coupure $(\{a \in E | a < x\}, \{b \in E | x \leq b\})$, car il résulte de la définition que $(\{a \in E | a \leq x\}, \{b \in E | x < b\})$ n'est pas une coupure de Dedekind.

Si $E = \mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels, on peut considérer la coupure suivante :
 $A = \{a \in \mathbb{Q} | a^2 < 2 \vee a \leq 0\}$ $B = \{b \in \mathbb{Q} | b^2 \geq 2 \wedge b > 0\}$

Cette coupure permet de représenter le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ qui est ici défini à la fois par l'ensemble des nombres rationnels qui lui sont inférieurs et par celui des nombres rationnels qui lui sont supérieurs.

La prise en compte de toutes les coupures de Dedekind sur \mathbb{Q} permet une construction de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} (voir l'article Construction des nombres réels).

Ordre sur les coupures de Dedekind :

Soient (A, B) et (C, D) deux coupures de Dedekind de E . On définit un ordre sur l'ensemble des coupures de Dedekind de E en posant :

$$(A, B) < (C, D) \Leftrightarrow A \subset C.$$

Il est possible de montrer que l'ensemble des coupures de Dedekind de E muni de cet ordre possède la propriété de la borne supérieure, même si E ne la possède pas. En plongeant E dans cet ensemble, on le prolonge en un ensemble dont tout sous-ensemble possède une borne supérieure.

2.4 Le raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer une propriété par disjonction des cas, on la prouve dans un nombre fini de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles.

Exercice 2.6 *Montrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.*

Un scénario de Lewis Carrol Considérons le problème suivant sachant que chacune des assertions suivantes est vraie :

1. Ou le malfaiteur est venu en voiture, ou le témoin s'est trompé ;
2. Si le malfaiteur a un complice, alors il est venu en voiture ;
3. Le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé ou bien le malfaiteur avait un complice et avait la clé ;
4. Le malfaiteur avait la clé.

Que peut-on en conclure ? Si on remplace la dernière par le malfaiteur n'avait pas la clé, peut-on conclure ?

3 Notions de théorie des ensembles

Nous avons déjà vu très rapidement les notions d'ensembles, d'appartenance, de réunion, d'intersection, d'inclusion, de complémentaire.

Nous avons aussi remarqué que ces ensembles pouvaient venir avec des "structures" : exemple : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sont munis de 2 opérations, une addition et une multiplication, elles-mêmes satisfaisant un ensemble de propriétés, mais aussi une "relation" d'ordre.

On peut aussi munir un ensemble d'une **relation "binaire"** ou **correspondance**, on met en relation certains éléments de l'ensemble avec d'autres.

Exemples : 1. dans \mathbb{Z} , un élément x est en relation avec un élément y si $x - y$ est pair.

2. Dans un ensemble de personnes, on peut définir la relation "aime".

3. Donnons-nous un ensemble E et un sous-ensemble F de l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times E$ (retenons cette définition : pour deux ensembles A, B , on a ainsi défini un nouvel ensemble, noté $A \times B$ qui est l'ensemble des *couples* (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$). Alors F définit une relation sur E par $x \in E$ est en relation avec $y \in E$ si $(x, y) \in F \subseteq E \times E$.

Exercice 3.1 1. Donner d'autres exemples de relations.

2. L'égalité est-elle une relation ?

3. Sur \mathbb{Q} , "être inférieur ou égal" est-elle une relation ?

4. Reprenant l'exemple d'un ensemble E de personnes avec la relation "aime", peut-on représenter cette relation sous la forme de l'exemple 3 ?

5. Même question avec le no 3 de l'exercice.

De telles relations peuvent elles-mêmes avoir des propriétés intéressantes. Ainsi, une relation peut être *réflexive*, *symétrique* ou *antisymétrique*, *transitive*.

Nous avons déjà rencontré plus haut une relation réflexive, symétrique et transitive (la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui permet d'identifier des couples afin d'obtenir \mathbb{Q} : le montrer, donner un autre exemple). Dans ce cas, on dit qu'on a une *relation d'équivalence*.

Définition 3.1 Etant donnée une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E , on appelle *graphe* de cette relation le sous-ensemble $G_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$ défini par

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times E, x\mathcal{R}y\}.$$

Dans le cas où la relation est réflexive, antisymétrique et transitive, on parlera de *relation d'ordre*.

Exercice 3.2 Dans les exemples ci-dessus, y a-t-il des relations d'équivalence, des relations d'ordre ?

Soit E un ensemble, \mathcal{R} une relation sur E . On dit que R est une *relation d'ordre* si :

* R est réflexive : si x est élément de E , $x\mathcal{R}x$.

* R est antisymétrique : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

* R est transitive : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

On dit alors que l'ensemble (E, R) est un *ensemble ordonné*. Souvent, \mathcal{R} est noté \leq .

Exercice 3.3 Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre :

* $(N^*, |)$ où $|$ désigne la relation de divisibilité.

* $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

* (\mathbb{Z}, \leq)

Dans toute la suite, (E, \leq) désigne un ensemble ordonné.

Deux éléments x et y de E sont dits comparables si $x \leq y$ ou bien $y \leq x$. L'ordre est dit *total* si deux éléments quelconques sont comparables; on dit encore que l'ensemble (E, \leq) est *totalelement ordonné*. Dans le cas contraire, il s'agit d'un ordre partiel.

Un élément $a \in E$ est appelé *élément maximal* de E si $a \leq x$ implique $x = a$. De même, a est appelé *élément minimal* de E si $x \leq a$ implique $x = a$. Un *plus petit élément* de E est un élément $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $a \leq x$. On définit de même un plus grand élément. De tels éléments n'existent pas toujours (exemples : \mathbb{N} n'a pas de plus grand élément, mais a un plus petit).

Exercice 3.4 *Les ensembles suivants sont-ils totalelement ordonnés, possèdent-ils un plus grand (petit) élément ? un élément maximal (minimal) ?* 1. $(\mathbb{N}^*, |)$; 2. (\mathbb{Z}, \leq) ; 3. $[a, b[\subset \mathbb{R}$; 4. l'ensemble des entiers multiples de 3, muni de \leq (idem : $|$) ? 5. Un sous-ensemble non vide de (\mathbb{N}, \leq) , un sous-ensemble non vide majoré de \mathbb{N} .

Remarque : un plus grand élément est un élément maximal, mais la réciproque est fautive (par ex. dans $(\mathbb{N}^*, |)$, 2 est élément minimal, mais ce n'est pas un plus petit élément).

Si A est une partie de E , un *majorant* de A est un élément $x \in E$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq x$. La *borne supérieure* de A est définie comme le plus petit des majorants. Elle n'existe pas toujours, ou bien parce qu'il n'existe pas de majorant, ou bien parce que l'ensemble des majorants n'admet pas de plus petit élément. On définit de même un minorant et la borne inférieure d'un ensemble.

Remarque 3.1 *Par construction de \mathbb{R} : tout ensemble non vide majoré possède une borne supérieure.*

Exercice 3.5 *Considérons l'ensemble F des fonctions polynomiales sur \mathbb{R} , muni de l'ordre $f \leq g$ ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \leq g(t)$.*

1. *Montrer que cela définit une relation d'ordre sur F ;*
2. *Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales qui sont majorées par la fonction exponentielle (c'est donc bien un ensemble majoré !) n'admet pas de borne supérieure.*

On peut plus généralement définir la notion de relation entre deux ensembles A et B .

Définition 3.2 *Une relation \mathcal{R} de A vers B est une association d'éléments de A avec des éléments de B . Si $a \in A$ est en relation avec $b \in B$, on notera $a\mathcal{R}b$.*

Exercice 3.6 *i. Montrer que la valeur absolue est une relation de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^+ .*

ii. Décrire la relation \sim de $A = \{0, 1, 2, 4\}$ vers $B = \{1, 3, 4, 5\}$ définie par $a \sim b \Leftrightarrow a + b \leq 4$.

Définition 3.3 *On appelle graphe de la relation \mathcal{R} de A vers B l'ensemble des couples*

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, b) \in A \times B, a\mathcal{R}b\}.$$

Exercice 3.7 1. Donner les graphes des relations précédentes.

2. Quel rapport y a-t-il avec les graphes définis précédemment ?

3. Soient $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$. On définit, pour $(a, b) \in A \times B$, la relation $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2 \leq b$. Quel est le graphe de cette relation ?

Définition 3.4 Soient E et F deux ensembles. On dit qu'une relation \mathcal{R} de E dans F est une application de E vers F si tout élément de E est en \mathcal{R} -relation avec un unique élément de F .

Exercice 3.8 1. La relation de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $x \in \mathbb{R}$ est en relation avec $y \in \mathbb{R}$ si $|x - y| = 2$ est-elle une application ?

2. La relation de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $x \in \mathbb{R}$ est en relation avec $y \in \mathbb{R}$ si $x^2 + y^2 = 1$ est-elle une application ? Quel est le graphe de cette relation ?

3. La relation de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe $x \in \mathbb{R}$ est-elle une application ?

4. Les relations de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui à x associent, respectivement, x^2 , $\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{x^3}{x^2-1}$? sont-elles des applications ? Pouvez-vous en donner le graphe (en fait, donner une représentation graphique) ?

Lorsque \mathcal{R} est une application de E vers F , nous préférons la noter sous une forme $R : E \rightarrow F$ et on utilisera, en général, une lettre minuscule pour la désigner. D'où l'écriture qu'on voit souvent $r : E \rightarrow F$. Lorsque $F = \mathbb{R}$, on préférera parler de *fonction réelle*.

Exemple 3.1 Une *suite réelle* est une application de l'ensemble des entiers naturels vers l'ensemble des réels (voir ci-dessous).

Définition 3.5 Une application $f : E \rightarrow F$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (resp. $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$, resp. f est à la fois injective et surjective).

Exercice 3.9 1. Parmi tous les exemples d'applications ci-dessus, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

2. Montrer l'équivalence $f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

3. On appelle image de l'application $f : E \rightarrow F$ le sous-ensemble de F , noté $f(E)$ défini par $f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$. Montrer que f est surjective équivaut à $f(E) = F$.

4. L'application $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $id(x) = x$ est-elle injective, surjective, bijective ?

5. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle injective, surjective, bijective ? Mêmes questions pour $f(x) = x^3$, pour $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $f(x) = \exp(x)$, $f(x) = \ln(x)$. Dans tous ces cas, peut-on définir des intervalles maximaux sur lesquels les fonctions sont injectives, surjectives, bijectives. En se rappelant que tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (noté \mathbb{R}^2) peut être représenté par un point du plan, à partir d'un "repère" convenable, représenter graphiquement dans le plan les ensembles qui sont les graphes de ces applications.

6. Soit $f : A \rightarrow B$ une application bijective. Montrer qu'on peut définir une application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$ (que signifie $f \circ g$?). Cette application g est appelée fonction réciproque de f (évidemment, dans ce cas, f sera la réciproque de g).

7. Dans les exemples ci-dessus où on a pu trouver des intervalles maximaux $I, J \subset \mathbb{R}$ tels que $f : I \rightarrow J$ est bijective, expliciter l'application réciproque correspondante.

8. Les fonctions affines et leur représentation.

Exercice 3.10 Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Définir des applications $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $fg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, définir $af : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quelles propriétés ont ces "opérations" (sens ??) ?

4 Notion de suite

Définition 4.1 Etant donné un ensemble A , on appelle suite de A toute application $u : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Remarque : par extension, nous dirons aussi qu'une application d'un intervalle $[n_0, +\infty[\rightarrow A$ est une suite de A . Autrement dit, on donne un sens à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots$, mais pas à $u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}$. En réalité, cela ne change pas fondamentalement puisque, en composant avec la bijection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1, n_0 - 1\}$ définie par $k \mapsto k + n_0$ on récupère une suite au sens précédent.

Nous allons nous intéresser aux suites de nombres réels, autrement dit aux applications $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Une application est définie par l'ensemble de ses valeurs, autrement dit, on connaît u si on connaît $u(n)$ pour tout entier n . On note le plus souvent l'image $u(n)$ de n par u_n et donc la suite u s'écrira plutôt $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donnons quelques exemples :

Exemple 4.1 1. La suite constante : soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel, la suite de terme général $u_n = a$ (ce qui veut dire : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$ ou encore l'application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = a$).

2. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

3. La suite de t.g. $u_n = 1/n$.

4. La suite arithmétique de premier terme a et de raison r est la suite dont le terme général est $u_n = a + nr$.

5. La suite géométrique de raison q est la suite de terme général $u_n = q^n$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (ie. une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). On définit une suite, la suite des itérés par f à partir de a , par récurrence de la manière suivante $u_0 = a$, $a \in \mathbb{R}$ donné et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = f(u_n)$.

7. La suite de Fibonacci est définie de manière récurrente de la façon suivante : $u_0 = u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Définition 4.2 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Nous dirons que x_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ si x_n "s'approche indéfiniment" de ℓ lorsque n devient de plus en plus grand. Cela se traduit mathématiquement par l'écriture :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |x_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Lorsque la suite admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dira aussi que la suite est convergente et converge vers ℓ .

Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devient de plus en plus grande, on dit qu'elle tend vers l'infini. ATTENTION : même si le terme utilisé est "tend vers", on ne parle plus dans ce cas de "limite" ! Cela se traduit mathématiquement par

$$\forall A > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*. Une suite peut diverger parce qu'elle tend vers $\pm\infty$ ou simplement parce qu'elle ne tend vers aucun nombre réel (exemple : $u_n = (-1)^n$).

Avant de s'attacher à "mémoriser" mécaniquement l'écriture mathématique, il faut absolument se poser la question de la signification. Après tout, on peut toujours montrer qu'une suite admet une limite donnée ou n'en admet pas en langage "ordinaire" et se poser la question de la traduction mathématique du type (4.2) après.

Exercice 4.1 1. Dans les exemples de l'exercice précédent, quelles sont les suites convergentes et quelles sont les suites divergentes. Dans le cas de convergence, quelle en est la (?) limite (au fait, pourquoi peut-on écrire LA limite ? Ecrire cela suppose que lorsqu'une limite existe, celle-ci est unique ! Qu'en pensez-vous ?).

2. Donner d'autres exemples de suites qui sont divergentes sans tendre vers $\pm\infty$.

Exercice 4.2 Montrer que $x_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ est équivalent à $v_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ où $v_n = u_n - \ell$.

Exercice 4.3 Déterminer pour les suites suivantes si l'ensemble V des valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majoré (resp. minoré), si la borne supérieure (resp. inférieure) existent, et, dans ce cas, si elles appartiennent à l'ensemble V , si la suite admet une limite (et laquelle) quand $n \rightarrow \infty$. On suppose $n \geq 1$ et a, b deux réels strictement positifs. $u_n = a + \frac{b}{n}$; $u_n = (-1)^n + \frac{b}{n}$; $u_n = a + (-1)^n \frac{b}{n}$; $u_n = a + (-1)^n b$; $u_n = \sin(n\pi)$; $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 4.4 Soit α un nombre entier compris entre 1 et 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres décimaux (rappel de la notion) définie par $u_n = 0, \alpha \alpha \cdots \alpha$ avec n termes après la virgule. Montrer que cette suite admet une limite qu'on calculera. Même question avec $v_n = 0, \alpha 1 2 \alpha 1 2 \cdots \alpha 1 2$ avec $3n$ chiffres après la virgule.

Exercice 4.5 Etudier si les suites suivantes ont une limite ℓ , tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou n'ont pas de limite lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n = \frac{5n-1}{2n+3}; u_n = \frac{5n+7}{n^2-n+1}; u_n = \frac{an^2+bn+c}{n+1} \text{ (discuter suivant les valeurs de } a, b, c \in \mathbb{R}); u_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{3(n+1)^2 \sin(5n)}; u_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{5n+1}; u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}; u_n = \frac{2^n}{n^2}.$$

Lemme 4.1 *Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ , celle-ci est unique.*

Preuve : voir l'exercice ci-dessus.

Il est intéressant de constater quelques propriétés des limites par rapport aux opérations d'addition et de multiplication (voir § précédent pour opérations sur des fonctions) pour prouver certaines convergences (ou non).

Théorème 4.1 *Une suite réelle croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente.*

Exercice 4.6 *Prouver le théorème précédent.*

Exercice 4.7 *Montrer que si (u_n) est une suite convergente majorée (resp. minorée) par un réel a , alors la limite ℓ de (u_n) vérifie $\ell \leq a$ (resp. $\ell \geq a$).*

Théorème 4.2 *Montrer que si $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $u_n \rightarrow \ell$ et $w_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

Exercice 4.8 *Prouver ce théorème.*

Proposition 4.1 *Tout nombre réel peut être approché par une suite de rationnels, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, il existe une "suite" de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $r_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Définissons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante. On prend pour a_0 la partie entière $[x]$ de x et $a_1 = [x] + 1$. Puis, successivement, on définit $a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2}$, si $x \in [a_0, a_2[$, $a_3 = \frac{a_0 + a_3}{2}$, sinon $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$; et plus généralement, si $x \in [a_k, a_\ell]$; $k < \ell$, tels que l'intervalle (a_k, a_ℓ) ne contient aucun autre a_i , alors $a_{\ell+1} = \frac{a_k + a_\ell}{2}$.

Par construction, on a alors, $|x - a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, donc la différence tend vers 0, autrement dit, $a_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Exercice 4.9 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux réels tels que $f(a)f(b) < 0$. En déduire qu'il existe $y \in]a, b[$ tel que $f(y) = 0$. Construire une suite (u_n) qui converge vers y (indication : prendre $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = (x_0 + x_1)/2$, puis selon que $f(x_0)f(x_2) \leq 0$ ou non, on prendra $x_3 = (x_0 + x_2)/2$ ou $x_3 = (x_1 + x_2)/2$; puis on construit x_4 sur ce modèle, puis x_5 et ainsi de suite).*

Notion de suite extraite d'une suite (et de "valeur d'adhérence", au moins intuitivement ???)

5 Les nombres complexes

De même que nous avons construit, successivement, \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N} pour résoudre des équations du type $x + a = 0$ où $a > 0$, \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} , pour donner un sens à la solution de $3x + 5 = 0$, par exemple, \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} pour des équations du type $x^2 = 2$, on peut avoir envie d'étendre \mathbb{R} pour obtenir un ensemble qui contient les racines carrées de tout réel : c'est ainsi que nous allons aboutir à la construction d'un nouvel ensemble, le "corps" des complexes \mathbb{C} et, de manière finalement beaucoup plus simple et facile que ne l'était le passage de \mathbb{Q} à \mathbb{R} . Je rappelle que nous nous sommes contentés pour ce passage d'une *idée de construction* et ne nous étions pas lancés dans une construction rigoureuse.

Pour ce qui est de \mathbb{C} , d'un point de vue "ensembliste", il s'agira simplement d'un ensemble déjà connu et vu maintes fois (sans la structure spécifique - les opérations - que nous allons y mettre) : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ensemble des couples de réels.

5.1 Définition algébrique

Considérons l'ensemble \mathbb{R}^2 et munissons-le des opérations suivantes :

- pour l'addition, nous allons considérer l'addition de couples en un sens naturel, à savoir : pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Il est immédiat de vérifier que cette addition a les propriétés suivantes : elle est associative, commutative, admet un élément neutre $(0, 0)$ et tout élément (a, b) admet un symétrique $(-a, -b)$.

- pour la multiplication, il s'agit de définir une opération qui a des propriétés analogues et qui, de plus, donnera des éléments dont le carré soit, par exemple, égal à -1 . On propose de la définir ainsi : pour tous, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

On notera \mathbb{C} l'ensemble \mathbb{R}^2 muni de ces deux opérations et on l'appellera le **corps des nombres complexes** ; un couple $(a, b) \in \mathbb{C}$ s'appelle un **nombre complexe**.

Exercice 5.1 1. Pourquoi ne pas définir d'une manière plus en rapport avec la définition de l'addition ?

2. Montrer que la multiplication ainsi définie est associative, commutative, qu'elle possède un élément neutre (qui ?), que tout élément non nul admet un symétrique (donner le symétrique - on dirait plutôt l'inverse de (a, b)).

3. Montrer que l'application $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui au nombre réel $x \in \mathbb{R}$ associe le "nombre complexe" $(x, 0)$ est injective. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $j(x + y) = j(x) + j(y)$ et $j(xy) = j(x)j(y)$. Ainsi \mathbb{C} peut légitimement être vu comme une "extension" de \mathbb{R} . Et, pour $x \in \mathbb{R}$, nous continuerons à noter par x l'élément $(x, 0)$ de \mathbb{C} , ainsi par exemple $(1, 0)$ désigne le même élément de \mathbb{C} que 1.

4. Calculer $(0, 1)^2$. Conclusion ?

5. Montrer que, pour tous $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, $(a, b) \times ((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$.

Rappelons qu'un ensemble muni de 2 opérations qui a les propriétés précédentes est appelé un *corps*. C'est pourquoi on parle du "corps" des complexes ; rappelons encore que \mathbb{Q} et \mathbb{R} avaient déjà ces propriétés et qu'on parle du corps des rationnels et du corps des réels.

Notations-définition : Nous noterons l'élément $(0, 1)$ par i . Le point 4 de l'exercice (5.1) montre que $i^2 = -1$. Pour le nombre complexe $z = (a, b)$, nous dirons que x est la **partie réelle** de $z = (a, b)$, nous écrirons $Re(z)$ et y est la **partie imaginaire** de z , que nous écrivons $Im(z)$ (Attention : remarquons que ce qu'on appelle "partie imaginaire" d'un nombre complexe est un réel!). Un nombre complexe de la forme ia , $a \in \mathbb{R}$ est appelé *imaginaire pur*.

Nous noterons encore, pour $z = (a, b) \in C$, \bar{z} le nombre complexe $\bar{z} = (a, -b)$.

Exercice 5.2 1. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}$, $(0, 1)(a, b) = (-b, a)$; en particulier, $(0, 1)(c, 0) = (0, c)$.

2. Montrer que $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$ permettant ainsi d'écrire avec l'identification du point 3 de l'exercice (5.1) ci-dessus l'élément (a, b) sous la forme $(a, b) = a + ib$. Réécrire alors le produit des 2 nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ (on remarquera qu'avec cette écriture, on n'a plus besoin de retenir la "formule" qui définit le produit, la seule chose qu'on utilise alors c'est $i^2 = -1$).

3. Montrer que $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + \bar{z}} = z + \bar{z}$, $\overline{z \bar{z}} = z \bar{z}$, $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$; calculer aussi $z + \bar{z}$, conclusion ?

4. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $(1+i)(1-i)$; $(1-i) + (-3+5i)$; $(1+i)^3$; $(3+2i)(1-i) - (2-i)^2 + (5-i)(5+i)$.

5. Montrer que $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

6. Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x + 1 = 0$.

7. En écrivant le trinôme $T = ax^2 + bx + c$ sous la forme $T = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c$, montrer que toute équation du second degré admet une solution (en réalité 2) que l'on calculera.

On a démontré dans le dernier exercice le résultat suivant

Théorème 5.1 Etant donnés trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admet les solutions suivantes :

- si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, les solutions sont réelles et données par

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les solutions sont complexes conjuguées et données par

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Définition 5.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre complexe \bar{z} sera appelé le conjugué de z . L'application $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à z associe \bar{z} est appelée conjugaison.

Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z}$ est appelé module de z et noté $|z|$.

Exercice 5.3 1. Montrer que σ est bijective.

2. Calculer $\sigma \circ \sigma$ (on notera σ^2 , mais attention au sens de ce "carré" !!). Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que les correspondances $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ sont des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{R} . Sont-elles injectives, surjectives ? Que peut-on dire de l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$?

4. Les applications Re et Im de la question précédente respectent-elles les opérations d'addition et de multiplication (autrement dit : a-t-on $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$? et de même pour Im ?) ? A quoi est égal $\operatorname{Re}(\alpha z)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$? Idem pour Im .

5. Montrer que $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Montrer que $|z| \geq \max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\}$. Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z||z'|$ et que (**Inégalité triangulaire**) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Montrer que :

Proposition 5.1 Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est réel (au sens de l'identification ci-dessus) ssi $z = \bar{z}$ et z est imaginaire ssi $z = -\bar{z}$.

Remarque 5.1 Rappelons que si les deux opérations d'addition et de multiplication de \mathbb{R} s'étendent bien à des opérations de \mathbb{C} , il n'en va pas de même de la relation d'ordre \leq de \mathbb{R} . On **ne peut donc pas comparer** deux nombres complexes quelconques et dire si l'un est "plus grand" ou "plus petit" que l'autre !!! "Question subsidiaire" : peut-on tout de même ordonner \mathbb{C} ?

5.2 Représentation géométrique

Nous avons défini un nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ comme le couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Or, comme nous l'avons déjà vu, un couple de réels correspond à un point du plan : en fixant un repère (définition ??) du plan (O, \vec{u}, \vec{v}) , où O désigne l'origine et \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non-colinéaires, qu'on prendra comme unités de longueur sur les axes qui les portent, axes orientés dans le même sens que les vecteurs, on repère un point M de coordonnées (a, b) comme l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (faire le dessin dans un repère orthonormé tout en remarquant que, pour représenter un point en général, le repère n'a nul besoin de l'être).

Ainsi, le nombre complexe $z = a + ib$, qui correspond au couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ peut être représenté géométriquement dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) par le point M de coordonnées (a, b) . On dit que a est l'abscisse du point M et b est son ordonnée et que z est l'affixe du point M . Autrement dit, la partie réelle de z correspond à l'abscisse de M , la partie imaginaire de z est l'ordonnée de M et z correspond d'une manière biunivoque à M : se donner un point du plan est équivalent à se donner un complexe z qui est son affixe et réciproquement.

Exercice 5.4 1. Tracer les points $z = 1, z = i, z = 1 + i, z = \cos \theta + i \sin \theta$ où $\theta \in [0, 2\pi[$, $z = 3 + 5i$ le produit $(1+i)(1-i)$, une somme $z+z'$ de deux complexes $z = a+ib, z' = a'+ib'$.

2. A quoi correspond géométriquement le produit $z\bar{z}$, autrement dit le module de z ?

3. Comment décrire l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que le point M d'affixe z décrit le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 ? Etant donné un point $M \in \mathcal{C}$ du cercle d'affixe z , par quel point est représenté l'inverse z^{-1} de z ?

4. Etant donné un nombre complexe z affixe d'un point M , quel est le point dont l'affixe est \bar{z} , le conjugué de z ?

5. Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\frac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

5.3 Module et argument d'un nombre complexe

Définition 5.2 Etant donné un nombre complexe $z = a + ib$, nous avons déjà défini son module $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui est aussi la longueur du segment OM où M est le point du plan d'affixe z .

On appelle argument du nombre complexe $z \neq 0$ toute mesure, en radians, de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\arg(z)$.

Remarque : l'argument $\arg(z)$ d'un nombre complexe z est défini modulo 2π . Autrement dit, un nombre complexe z admet une infinité d'arguments : si θ est un argument de z , alors les autres arguments sont $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. L'**unique** argument appartenant à l'intervalle $]-\pi, +\pi]$ est appelé *argument principal* de z .

Exercice 5.5 1. Représenter graphiquement le point M d'affixe $z = a + ib$. A quoi correspondent sur le dessin le module et l'argument de z ? Si θ est l'argument de z (modulo 2π !), exprimer a et b en fonction de $|z|$ et θ .

2. Représenter graphiquement la somme et la différence de 2 nombres complexes z et z' . Remarquer en particulier que, si A est le point d'affixe z et B celui d'affixe z' , le point d'affixe $z + z'$ est le point obtenu C obtenu comme extrémité de la somme des vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} . Montrer aussi que l'affixe de \overrightarrow{AB} est $z - z'$.

3. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times]-\pi, +\pi]$ définie par $(a, b) \mapsto (\sqrt{a^2 + b^2}, \theta)$ est une bijection.

4. Calculer $|zz'|$ et $|z||z'|$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 5.6 1. On donne $Z_A = -1 + 3i; Z_B = 2 - i$. Soit A le point d'affixe Z_A ; B celui d'affixe Z_B . Calculer la distance AB .

2. Montrer que si u, v sont deux nombres complexes distincts, de même module r , alors $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

3. Quels sont les arguments des nombres complexes suivants : $1, i, \sqrt{2} + i\sqrt{2}, -1, 1/2 + i\sqrt{3}/2, -i$?

Lemme 5.1 (i) $z \in \mathbb{C}$ est réel ssi ($z = 0$ ou $\arg(z) = 0 \pmod{\pi}$).

(ii) $z \in \mathbb{C}$ est imaginaire pur (non nul) ssi $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Preuve : exo

Proposition 5.2 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Soit θ un argument de z . Alors $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

Preuve : on trace le cercle de centre O et de rayon $|z|$. Alors le point d'affixe z appartient à ce cercle et sa projection sur l'axe Ox est a , sur l'axe Oy est b . D'où le résultat.

Exercice 5.7 1. Soit le point M du plan caractérisé par l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$ et la longueur $OM = r$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver la forme algébrique de l'affixe z de M .

2. Calculer l'argument principal de $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

3. Comment peut-on déterminer l'argument principal de $z = 3 - 4i$?

Exercice 5.8 Montrer que l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application surjective qui a les propriétés suivantes :

- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$;

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, alors $|\alpha z| = |\alpha| |z|$ (expliciter le sens des notations $|\cdot|$) ;

- Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exercice 5.9 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$, on a $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$, $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Exercice 5.10 (plus difficile) Montrer que si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(z) = \pi \pmod{2\pi}$ et si $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*$ alors $\arg(z) = 2 \arctan\left(\frac{b}{|z| + a}\right) \pmod{2\pi}$.

5.4 Forme trigonométrique

Nous avons vu que, étant donné un nombre complexe $z = a + ib \neq 0$, si $\theta = \arg(z)$ désigne un argument de z (à 2π près) et si on note $r = |z| \in \mathbb{R}_+$, alors $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$, autrement dit, on peut écrire $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z .

Montrer que θ (défini à 2π près) et r définissent z de manière unique.

Montrer que si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Exercice 5.11 Trouver une forme trigonométrique de $z = -2(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$.

Théorème 5.2 Pour deux nombres complexes non nuls z, z' , on a $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.

Preuve : Ecrivons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = s(\cos \eta + i \sin \eta)$ et évaluons le produit.

On obtient :

$$zz' = r(\cos \theta + i \sin \theta)s(\cos \eta + i \sin \eta) \tag{1}$$

$$= rs((\cos \theta \cos \eta - \sin \theta \sin \eta) + i(\sin \theta \cos \eta + \cos \theta \sin \eta)). \tag{2}$$

Utilisant les formules de trigonométrie (voir le cours de Fondements de math.), on en tire :

$$\cos \theta \cos \eta - \sin \theta \sin \eta = \cos(\theta + \eta)$$

$$\sin \theta \cos \eta + \cos \theta \sin \eta = \sin(\theta + \eta).$$

D'où

$$zz' = rs(\cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta)).$$

Autrement dit, $\arg(zz') = \theta + \eta \pmod{2\pi}$ et on retrouve aussi que $|zz'| = rs$.

Exercice 5.12 *Rappeler comment on montre les formules $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.*

Exercice 5.13 *Calculer $\arg(\frac{1}{z})$ pour $z \neq 0$, $\arg(z/z')$ et $\arg(z^n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Ainsi, pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments.

Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.

On va donner une nouvelle forme (très pratique pour un certain nombre de calcul) : notons

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

L'exponentielle réelle a la propriété caractéristique suivante : $e^{x+y} = e^x e^y$; c'est même LA fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 5.14 *Montrer que, si f vérifie l'équation fonctionnelle ci-dessus et si on note e la valeur $f(1)$, alors, pour tout réel x , on a $f(x) = e^x$.*

Exercice 5.15 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$. Montrer que f vérifie l'équation "différentielle" $y' = ay$, $a \in \mathbb{C}$ que l'on déterminera.*

Les exercices ci-dessus "justifient" en quelque sorte la notation exponentielle. $e^{i\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta \pmod{2\pi}$.

Plus généralement, soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe donné par module et argument, on peut alors écrire $z = r e^{i\theta}$.

Exercice 5.16 *Utiliser cette nouvelle notation pour calculer le produit de 2 nombres complexes z et z' . De même, calculer $1/z$ et z/z' .*

Exercice 5.17 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes de même module $r(> 0)$. Calculer la somme $z + z'$.*

Théorème 5.3 Formules de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (\cos(\theta) - i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta).$$

Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve : la preuve est facile en utilisant la définition de $e^{i\theta}$. En effet, écrivons

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Pour obtenir les formules d'Euler, il suffit d'écrire :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (3)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta). \quad (4)$$

D'où, en additionnant membre à membre, on obtient la 1ère formule, en soustrayant, la 2ème.

Exercice 5.18 1. Utiliser les nombres complexes pour redémontrer les formules de trigonométrie.

2. Linéariser, c'est-à-dire mettre sous forme de somme de cosinus et de sinus, l'expression $\cos 3\theta \sin 2\theta$.

3. Inversement, exprimer $\cos 7a$ et $\sin 7a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.

Exercice 5.19 1. Linéariser : $\sin 3a$ et $\cos 4a$.

2. Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

3. Démontrer que : $x^2 - 2x \cos(b) + 1 = (x - e^{ib})(x - e^{-ib})$.

4. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{it} - 1} \right) \text{ et } \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1} \right).$$

5. Démontrer que pour tout $\theta \neq \pi/2 \pmod{2\pi}$,

$$e^{2ia} = \frac{1 + i \tan(a)}{1 - i \tan(a)}.$$

6) Calculer $\sum_{k=0}^n e^{ikt}$ où $t \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin[(2n+1)x] = \sin x \left(2 \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1 \right).$$

5.5 Racines n -ième de l'unité

On se propose ici de trouver les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 5.2 Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de $z^n = 1$, alors on doit avoir $|z|^n = 1$ (en effet, le module d'un produit est le produit des modules et $|1| = 1$). Par conséquent, $r = |z|$ doit être une solution **réelle positive** de $x^n = 1$. Or, la seule solution réelle positive de $x^n = 1$ est $x = 1$ (pourquoi ?).

Conséquence, pour résoudre l'équation $z^n = 1$, il suffit de regarder les nombres complexes de module 1, autrement dit, utilisant la notation exponentielle, il suffit de chercher les z sous la forme $z = e^{i\theta}$.

Résolvons donc $1 = z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. L'inconnue dans cette équation est θ et il faut trouver θ tel que

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos n\theta = 1 \\ \sin n\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Exercice 5.20 *Les solutions de $z^n = 1$ sont toutes sur le cercle de centre O et de rayon 1. Tracez les points dont ils sont les affixes dans les cas $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Que peut-on dire du polygone qui dont les arêtes sont ces points.*

Exercice 5.21 *Utiliser les racines n -ièmes de l'unité pour résoudre l'équation $z^n = a$.*

Exercice 5.22 *Résoudre l'équation $ix^2 + ix + 4 = 0$.*

Quelques rappels sur les polynômes d'une variable.

On admettra le théorème suivant dont la démonstration nécessite un peu plus de prérequis.

Théorème 5.4 ***Théorème fondamental de l'algèbre** Tout polynôme de degré ≥ 1 , à coefficients dans \mathbb{C} , admet au moins une racine dans \mathbb{C} .*

Question A-t-on un résultat analogue pour les polynômes à coefficients dans \mathbb{R} ?

6 Géométrie

Nous allons rappeler un certain nombre de notions de géométrie élémentaire avant d'appliquer les nombres complexes à la géométrie.

6.1 Généralités

On considère E l'espace à trois dimensions dans lequel nous vivons, c'est un ensemble de points. En choisissant un point privilégié O , appelé origine et 3 points "en position générale", A, B, C on peut repérer tout point de E par rapport à O, A, B, C .

Etant donnés 2 points $M, N \in E$, on appelle **segment** MN l'ensemble des points Q tels que $MQ + QN = MN$ et on note $[MN]$. L'un des axiomes d'Euclide énonce que l'on peut prolonger indéfiniment un segment $[MN]$ vers l'extérieur de chacune des extrémités ; l'ensemble des points ainsi obtenus est appelée la **droite** MN . Deux droites distinctes qui se coupent en un point M définissent un **plan** : c'est l'ensemble des points appartenant à toute droite sécante aux deux droites données en des points autres que le point M .

Etant donnés M et N , nous appellerons **vecteur** d'origine M et d'extrémité N le segment orienté $[MN]$, nous noterons \overrightarrow{MN} .

Sur l'ensemble des vecteurs d'origine O , on définit une somme :

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ}$$

où Q est le point obtenu par construction du parallélogramme dont 3 des sommets sont O, M, N . On peut aisément vérifier que cette “opération” a les propriétés de commutativité et d’associativité voulues et que, si on note $\vec{0}$ le vecteur correspondant au bipoint OO , celui-ci est un élément neutre pour cette opération. De plus, le symétrique d’un vecteur \vec{OM} est le vecteur $\vec{OM'}$ où M' est le symétrique de M par rapport à O , ie. l’unique point de la droite OM tel que $OM = OM'$ tel que $M \neq M'$.

De même, on peut définir un autre type d’“opération” : multiplier un vecteur d’origine M par un nombre réel $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, on définit $a\vec{OM}$ comme étant le vecteur d’origine O , $\vec{OM'}$ où M' est le point de la droite OM tel que le rapport des longueurs $\frac{OM'}{OM} = |a|$ où M' est du même côté que M par rapport à O si $a > 0$ et de l’autre sinon.

Exercice 6.1 Vérifier que l’on a $1\vec{OM} = \vec{OM}$, $a(b\vec{OM}) = (ab)\vec{OM}$ (= aussi $b(a\vec{OM})$), $(a+b)\vec{OM} = a\vec{OM} + b\vec{OM}$, $a(\vec{OM} + \vec{ON}) = a\vec{OM} + a\vec{ON}$.

Ainsi l’espace E peut être repéré par la donnée des trois vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$: en effet, un point M pourra être déterminé par trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\vec{OM} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}.$$

Equipollence de 2 vecteurs

Définition 6.1 Etant donnés deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} , nous dirons que \vec{AB} est équipollent à \vec{CD} si le polygone $ABDC$ est un parallélogramme, ou encore, plus prosaïquement, si les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, ont même longueur et sont orientés dans la même direction.

Exercice 6.2 Montrer que la relation d’équipollence est une relation d’équivalence sur l’ensemble des vecteurs.

Remarque : Tout vecteur \vec{AB} est équipollent à un vecteur d’origine O .

Notion de géométrie analytique

De manière analogue à ce que nous avons déjà remarqué dans le cas du plan, par le choix d’un repère, nous pouvons représenter tout point de l’espace par la donnée des trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{OM} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}.$$

Autrement dit, nous avons une application bijective $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(M) = (a, b, c)$. On dit que le triplet (a, b, c) sont les **coordonnées** du point M dans le repère (O, A, B, C) (ou $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$).

Ce sont aussi les coordonnées du vecteur \vec{OM} dans $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ et, plus généralement de tout vecteur équipollent à \vec{OM} .

Notons que cette application dépend évidemment du repère choisi.

Remarquons encore que, si Q est tel que $\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OQ}$ et si $\phi(M) = (a, b, c)$, $\phi(N) = (a', b', c')$, alors $\phi(Q) = (a + a', b + b', c + c')$.

Remarque 6.1 Notons encore que nous n'avons fait aucune hypothèse sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ si ce n'est d'être "en position générale", ce qui veut dire en clair que les trois points ne doivent pas appartenir à un même plan. Cependant, un cas particulier intéressant est donné par le cas où les 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ sont de même longueur et font entre eux des angles droits. On parle alors de repère **orthonormé**.

Exercice 6.3 Etant donnés A, B, C, D quatre points de l'espace E , rapporté à un repère et notons $(a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''), (d, d', d'')$ les coordonnées respectives de A, B, C, D dans ce repère. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont équipollents si et seulement $(b - a, b' - a', b'' - a'') = (d - c, d' - c', d'' - c'')$.

En conséquence, nous dirons que le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(b - a, b' - a', b'' - a'')$, autrement dit les coordonnées du point F tel que \overrightarrow{OF} représente la classe d'équipollence de \overrightarrow{AB} .

Proposition 6.1 Deux vecteurs (bipoints) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sont équipollents si et seulement si leurs coordonnées dans un même repère sont égales.

La preuve découle immédiatement de l'exercice précédent.

Exercice 6.4 Montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sont parallèles si et seulement si il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que \overrightarrow{AB} est équipollent à $\lambda \overrightarrow{CD}$. Rappelons que $\lambda \overrightarrow{CD}$ désigne un vecteur porté par la droite (CD) , équipollent à $\lambda \overrightarrow{OF}$ où \overrightarrow{OF} est le vecteur, d'origine O , équipollent à \overrightarrow{CD} .

6.2 Le plan

Nous avons vu qu'un plan dans l'espace est défini par 2 droites distinctes sécantes. Pour se repérer dans un plan, il suffit de se donner une origine et 2 points, autrement dit

Etant données deux droites distinctes D, D' concourantes en un point O , définissant le plan $P \subset E$, en prenant un point $A \in D$, un point $B \in D'$, il suffit de se donner un autre point $C \notin P$ pour obtenir un repère de l'espace E . Dans ce cas, il est immédiat de remarquer que, dans l'identification de P avec \mathbb{R}^3 , l'ensemble des points de P est l'ensemble des points de coordonnées $(a, b, 0)$ dans ce repère.

On dit aussi que, si on note $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées dans le repère ci-dessus, le plan P a pour **équation** $z = 0$.

Exercice 6.5 On se donne l'espace E et un repère $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

1. Quelles sont les coordonnées des points O, A, B, C dans ce repère? Quelle est l'équation du plan OAB ? du plan OAC ? du plan OBC ? du plan ABC ? Tracer les plans d'équation $x = a, y = b, z = c$ où a, b, c sont des réels fixés. L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est-il un plan (le justifier)?

2. Montrer que l'équation $ax + by + cz = 0$ détermine un plan passant par O .

3. Montrer que le plan P parallèle au plan d'équation $ax + by + cz = 0$ passant par le point H de coordonnées $(0, 0, d/c)$ a pour équation $ax + by + cz = d$. C'est là l'équation générale d'un plan de E .

De la même façon que nous avons “identifié” l’espace à \mathbb{R}^3 lorsque nous avons fixé un repère, en fixant un repère du plan, nous pouvons identifier P avec \mathbb{R}^2 , en identifiant les points avec leurs coordonnées. Ici aussi, le choix du repère consiste à prendre une origine O et 2 vecteurs, non colinéaires, issus de $O : \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. On pourra prendre un repère quelconque, mais on préférera, autant que possible et selon ce qu’on se propose de faire, prendre un repère orthonormé ie. tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ soient perpendiculaires et de même longueur (il y a aussi une question d’orientation : on convient d’orienter dans le sens inverse des aiguilles d’une montre et de prendre l’angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = +\pi/2$). Désormais, sauf mention du contraire, on ne considérera que des **repères orthonormés**.

Exercice 6.6 1. Soit \vec{u} un vecteur et A de coordonnées $(a, a') \in \mathbb{R}^2$ un point de P . A quelle(s) condition(s) le point M appartient-il à la droite de direction \vec{u} passant par A ?
 2. Soit A de coordonnées (a, a') , B de coordonnées (b, b') deux points distincts de P et D la droite AB . A quelle(s) condition(s) sur ses coordonnées (x, y) , le point M appartient-il à D ?

Définition 6.2 Etant donnés $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l’ensemble des points M du plan rapporté à un repère, de coordonnées (x, y) dans ce repère, où x, y vérifient

$$\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases} \quad (5)$$

λ décrivant tout \mathbb{R} , définissent une droite D du plan. Les équations (5) sont appelées des **équations paramétriques** de D .

Définition 6.3 L’ensemble des points M du plan rapporté à un repère, de coordonnées (x, y) qui vérifient l’équation $ax + by + c = 0$ est une droite D . L’équation s’appelle **équation cartésienne** de la droite D . Elle est **uniquement déterminée** à multiplication par un réel non nul près.

Exercice 6.7 Comment passer d’une représentation à une autre ?

1. Soit D la droite donnée par les équations paramétriques $x = 3 + 2\lambda$, $y = 1 + 5\lambda$ dans un repère orthonormé. Représenter la droite et donner son équation cartésienne.

2. On se donne la droite Δ d’équation $2x + 3y - 1 = 0$ dans un repère orthonormé (au fait qu’en est-il d’un repère non orthonormé ?). La représenter. Donner un vecteur parallèle à cette droite et un point appartenant à Δ . Donner des équations paramétriques de Δ . Peut-on en donner d’autres ?

3. On ramène le plan à un repère orthonormé. Soit A de coordonnées $(1, 2)$ et \vec{u} un vecteur de coordonnées $(2, 3)$ et D la droite passant par A de direction \vec{u} . Soit B de coordonnées $(-1, 0)$ et \vec{v} un vecteur de coordonnées $(1, -3)$ et Δ la droite passant par B de direction \vec{v} . Trouver les coordonnées du point d’intersection, s’il existe, de ces deux droites.

4. On se donne les deux droites D et Δ par leur équation cartésienne, respectivement $x + y - 2 = 0$ et $3x - 5y + 12 = 0$ dans le plan rapporté à un repère donné. Ces deux droites se coupent-elles et, si oui, trouver leur intersection.

5. On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$. Calculer la dérivée au point $x = 2$. Ecrire l’équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de cette fonction au point d’abscisse 2.

6.3 Produit scalaire

Remarque 6.2 Tous les repères considérés seront orthonormés.

Définition 6.4 Donnons-nous un repère orthonormé du plan (ou de l'espace). Le produit scalaire des vecteurs \vec{u}, \vec{v} de coordonnées respectivement $(x, y), (x', y')$ (ou $(x, y, z), (x', y', z')$ dans l'espace) est le nombre réel $xx' + yy'$ (ou, dans l'espace $xx' + yy' + zz'$). Cela définit une application ϕ de l'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) dans \mathbb{R} .

L'application ϕ a des propriétés de "bilinearité" (explications et exercice).

Pour tout vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2.$$

On définit par ce réel la **norme** (on dit aussi *longueur*, surtout lorsqu'il s'agira de bipoints) du vecteur \vec{u} . Un **vecteur normé** sera un vecteur de norme 1. La norme définit une application de l'ensemble des vecteurs vers \mathbb{R}^+ . On en donnera une liste de propriétés.

Exercice 6.8 1. A-t-on $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$?
2. Supposons $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Calculer le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} .

Exercice 6.9 1. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

2. Montrer que, si les deux vecteurs sont non nuls, alors le produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

(on rappelle que l'angle des deux vecteurs est l'angle - orienté - des vecteurs équipollents issus de la même origine).

Ces exercices ont montré la proposition :

Proposition 6.2 1.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

2. Si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Corollaire 6.1 Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul (par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

Preuve : c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. En effet, $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Si un vecteur est non nul, sa norme est non nulle (pourquoi?), d'où $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, cet angle est donc égal à $\pi/2$ ou à $3\pi/2$ modulo 2π ; les deux vecteurs sont donc orthogonaux. □

Proposition 6.3 Si \vec{v}' est la projection orthogonale de v sur la droite déterminée par \vec{u} , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$.

La preuve est laissée en exercice. Par projection orthogonale de \vec{v} sur la droite déterminée par \vec{u} , il faut entendre la chose suivante. Prenons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et \vec{j} tel que l'angle (\vec{i}, \vec{j}) soit $+\pi/2$ et \vec{k} tel le repère soit *direct*. Alors la projection orthogonale de \vec{v} est le vecteur \vec{OD} où D est le point d'intersection du plan parallèle au plan (O, \vec{j}, \vec{k}) passant par l'extrémité du vecteur $\vec{OB} \equiv \vec{v}$.

Proposition 6.4 Le produit scalaire de 2 vecteurs est indépendant du repère orthonormé choisi.

Preuve : (exo) Faisons la démonstration dans le plan pour des raisons de simplicité des calculs.

On remarque tout d'abord qu'on peut se ramener à prendre un deuxième repère de même origine.

Donnons-nous donc un repère du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) et un deuxième repère $(O, \vec{k}, \vec{\ell})$ orthonormé. Que signifie que ce repère est orthonormé : cela veut dire que les vecteurs sont de longueur 1 et perpendiculaires. Ecrivons ces deux vecteurs dans le repère précédent :

$$\vec{k} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \quad \vec{\ell} = \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j}.$$

Les conditions s'écrivent alors :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 \text{ (perpendicularité) et} \quad (6)$$

$$1 = \|\vec{k}\| = \|\vec{\ell}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} \quad (7)$$

Ecrivons $\vec{u} = x' \vec{k} + y' \vec{\ell}$ et $\vec{v} = x'' \vec{k} + y'' \vec{\ell}$ dans le repère $(O, \vec{k}, \vec{\ell})$.

Calculons alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Pour cela, il nous faut trouver les coordonnées de ces vecteurs dans l'ancien repère (celui dans lequel on a défini le produit scalaire comme étant la somme du produit des abscisses et du produit des ordonnées. On a :

$$\vec{u} = x'(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}) + y'(\alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j}) = (x'\alpha + y'\alpha') \vec{i} + (x'\beta + y'\beta') \vec{j} \quad (8)$$

$$\vec{v} = x''(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}) + y''(\alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j}) = (x''\alpha + y''\alpha') \vec{i} + (x''\beta + y''\beta') \vec{j}. \quad (9)$$

Calculons à présent le produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x'\alpha + y'\alpha')(x''\alpha + y''\alpha') + (x'\beta + y'\beta')(x''\beta + y''\beta') \quad (10)$$

$$= (\alpha\alpha' + \beta\beta')(x'y'' + x''y') + (\alpha^2 + \beta^2)x'x'' + (\alpha'^2 + \beta'^2)y'y''. \quad (11)$$

D'où par (6) et (7), on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x'y'' + y'y''.$$

On constate ainsi que le produit scalaire dans le nouveau repère est encore obtenu comme la somme des produits des coordonnées respectives. □

Exercice 6.10 1. Ecrire l'équation d'une droite du plan orthogonale au vecteur $\vec{u} = (3, -5)$, d'un plan de l'espace orthogonal au vecteur $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

2. Etant donnés les 2 plans d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y + z - 1 = 0$ et $x + y + z + 2 = 0$. A quoi est égale leur intersection et la caractériser en terme de relations entre les coordonnées (x, y, z) d'un point M y appartenant. Mêmes questions pour les plans d'équations $-x + 3y - z + 4 = 0$ et $2x - 6y + 2z = 1$.

3. Etant donné la droite D du plan d'équation cartésienne $x - 3y = 5$, écrire l'équation cartésienne de la droite Δ , orthogonale à D et passant par le point P de coordonnées $(3, -2)$.

4. Etant donné le plan P d'équation cartésienne $x - 3y + z = 5$, écrire l'équation cartésienne de la droite Δ , orthogonale à P et passant par le point P de coordonnées $(3, -2, 1)$.

5. On rappelle qu'étant donnés deux sous-ensembles A et B du plan ou de l'espace, on appelle distance de A à B , on note $d(A, B)$, la borne inférieure de l'ensemble des normes $\|MN\|$ où $M \in A$ et $N \in B$.

Etant données les deux droites D et Δ du plan d'équations $2x + 3y + 3 = 0$ et $x + y - 1 = 0$, calculer la distance $d(D, \Delta)$. Même question pour $D : 2x + 3y + 3 = 0$ et $\Delta : -x - 3/2y + 2 = 0$.

Etant données les deux droites D et Δ de l'espace d'équations

$$D : \begin{cases} 2x + 3y + 3z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta : \begin{cases} 3x - y + 2z - 5 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases},$$

calculer la distance $d(D, \Delta)$.

6. Montrer que, dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales.

7. Dans un cube, montrer que la diagonale D d'une face est orthogonale à la diagonale intérieure joignant un des sommets de la face qui n'est pas extrémité de D au sommet opposé.

Théorème 6.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Inégalité triangulaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Preuve : du fait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$, le résultat est immédiat et on peut remarquer qu'il n'y a égalité que lorsque \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Par ailleurs, on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Utilisant le résultat précédent : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ (si le produit est négatif, c'est immédiat, on peut donc enlever la valeur absolue), d'où

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Et, par conséquent, l'inégalité annoncée. □

Exercice 6.11 Montrer que, dans un triangle, la somme des longueurs des médianes est inférieure au périmètre.