UNIVERSITÉ D'ANGERS

# Structures algébriques sur l'homologie des lacets et la cohomologie de Hochschild

Habilitation à diriger les recherches soutenue le 13 Juin 2008

par

**Luc MENICHI**

Rapporteurs :

| | | |
|---|---|---|
| Jean-Louis LODAY | *Directeur de Recherche CNRS* | *Strasbourg* |
| James MCCLURE | *Professeur* | *Purdue* |
| Micheline VIGUÉ | *Professeure* | *Paris 13* |

Composition du Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Yves FELIX | *Professeur* | *Louvain* |
| Vincent FRANJOU | *Professeur* | *Nantes* |
| Jean-Louis LODAY | *Directeur de Recherche CNRS* | *Strasbourg* |
| Frédéric PATRAS | *Directeur de Recherche CNRS* | *Nice* |
| Jean-Claude THOMAS | *Professeur émérite* | *Angers* |
| Micheline VIGUÉ | *Professeure* | *Paris 13* |

A mes petites femmes :
Sophie et Hélène.

# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Jean-Claude THOMAS pour tous ses conseils, encouragements et nombreuses discusssions.

En plusieurs occasions, Yves FELIX m'a rappelé que la Topologie Algébrique malgré la lourdeur de sa machinerie avançait avec des idées simples.

Jean-Louis LODAY, James MCCLURE et Micheline VIGUÉ m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. J'espère que cela n'a pas été trop difficile, en particulier pour James MCCLURE qui n'est pas francophone.

Je tiens aussi à remercier Vincent FRANJOU et Frédéric PATRAS d'avoir accepté de participer au jury de la soutenance.

Je remercie également les membres actuels et passés du groupe de travail de Topologie Algébrique Angers-Nantes : Gérald GAUDENS, David CHATAUR, Laurent PIRIOU, Friedrich WAGGEMANN, Antoine TOUZÉ...

Finalement, je remercie

-les secrétaires du laboratoire et notre bibliothécaire : Isabelle BERTHAUD, Catherine LOUAZEL, Françoise BOCK.

-les directeurs du département : Philippe DUBOIS, Daniel SCHAUB et François DUCROT.

-les directeurs du laboratoire : Jean-Michel GRANGER, Adam PARUSINSKI et Jean-Jacque LOEB.

-notre responsable bénévole de l'informatique François DUCROT et notre récent ingénieur système Jacquelin CHARBONNEL.

En résumé, tout les personnes qui ont assuré le bon fonctionnement du département ces dernières années.

## Articles constituant la thèse d'habilitation

Ma thèse d'habilitation est constituée des six articles suivants et trois prépublications suivantes (tous disponibles sur `www.menichi.com`)

1. L. Menichi, *On the cohomology algebra of a fiber*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 719–742.
2. L. Menichi, *P-th powers in mod p cohomology of fibers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 6, 537–540.
3. L. Menichi, *The cohomology ring of free loop spaces*, Homology Homotopy Appl. **3** (2001), no. 1, 193–224.
4. Y. Felix, L. Menichi et J.-C. Thomas, *Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra, **199** (2005), 43–59.
5. L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras*, $K$-theory, **32** (2004), 231–251.
6. L. Menichi (appendice avec G. Gaudens), *String topology for spheres* , à paraître dans *Comment. Math. Helv.*, disponible sur ArXiv (2006).
7. G. Gaudens, L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebras and the J-homomorphism*, disponible sur ArXiv (2007), soumis pour publication.
8. L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild Cohomology*, disponible sur ArXiv (2007), soumis pour publication.
9. D. Chataur, L. Menichi, *String Topology of classifying spaces*, ArXiv (2008).

# 1 Introduction

Ces résultats se situent dans le cadre de la théorie de l'homotopie instable et ses applications à la géométrie ou à la physique théorique. Ils concernent en effet l'étude de l'espace des lacets pointés ou des lacets libres.

Rappelons que si $X$ et $Y$ sont des espaces topologiques (resp. des espaces topologiques pointés) alors $\mathrm{map}\,(X,Y)$ désigne l'espace des applications continues de $X$ dans $Y$ (resp. $\mathrm{map}_*\,(X,Y)$ désigne l'espace des applications continues de $X$ dans $Y$ qui respectent le point base) muni de la topologie de la convergence compacte [3, TG X.27]. Cette topologie nous assure de la continuité de l'application d'évaluation, [3, TG X.28],

$$\mathrm{map}\,(X,Y)\times X\to Y\,.$$

Signalons que la cohomologie de ces espaces d'applications n'est pas aisément calculable. (Thom [51], Suite spectrale de Federer [14], Lannes [38],...). Elle est reliée à de nombreuses autres constructions géométriques : espace de configurations, espaces classifiants,... .

Dans la suite nous nous intéressons plus particulièrement aux espaces suivants :

- L'espace des lacets pointés de $X$ : $\Omega X := \mathrm{map}_*(S^1, X)$,
- L'espace des lacets itérés de $X$ $(n\geq 2)$ :

$$\Omega^n X := \mathrm{map}_*(S^n, X) = \Omega\left(\Omega^{n-1}X\right)$$

,

- L'espace des lacets libres de $X$ : $LX := \mathrm{map}\,(S^1, X)$.

La complexité de la structure des espaces de lacets itérés a conduit à l'introduction de la théorie des opérades, [2, 39]. Théorie qui maintenant intervient dans différents autres domaines (Homotopie stable, Homotopie motivique, Géométrie algébrique, Homologie cyclique, ...)

Les espaces $\Omega X$ et $LX$ jouent un rôle essentiel en géométrie et physique théorique. Citons par exemple le Théorème de Gromoll-Meyer qui relie la structure vectorielle de l'homologie de l'espace des lacets libres à l'existence de géodésiques fermées sur une variété riemannienne.

**Théorème** (Gromoll-Meyer) *Soit $M$ une variété lisse simplement connexe compacte sans bord. Si pour un corps $\Bbbk$ quelconque, la suite des nombres de*

*Betti de $LM$ est non bornée, alors pour toute métrique riemannienne sur $M$, il existe une infinité de géodésiques férmées géométriquement distinctes.*

Ce résultat a conduit à la conjecture suivante :

**Conjecture** *Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique $p$ quelconque. Si l'algèbre $H^*(M)$ requiert au moins deux générateurs, alors la suite des nombres de Betti de $LM$ est non bornée.* (Lorsque $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique 0, la conjecture est un théorème de Sullivan et Vigué-Poirrier [54].)

Examinons maintenant de manière plus précise chacun des articles constituant la thèse d'habilitation. Ceux-ci sont présentés dans l'ordre de conception.

# 2 Le Cup-produit

Soit $X$ un espace topologique. Soit $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ l'application, appelé application diagonale, qui à $x$ associe le couple $(x, x)$. Par fonctorialité de la cohomologie, nous obtenons un produit sur la cohomologie de $X$, appelé le *cup-produit* :

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X \times X) \overset{H^{p+q}(\Delta)}{\to} H^{p+q}(X).$$

La cohomologie de $X$, notée $H^*(X)$, devient donc une algèbre (graduée) commutative.

Dans cette première partie, j'ai regroupé mes trois premiers articles où j'étudie l'algèbre de cohomologie d'un espace $P$ obtenue comme produit fibré de deux applications dont au moins une est une fibration. Je me concentre particulièrement sur les deux cas particuliers suivants où

- $P$ est la fibre $F$ d'une fibration,
- $P$ est un espace de lacets libres $LX$.

**Premier Article : On the cohomology algebra of a fiber [45]**
Du point de vue de la théorie de l'homotopie, les espaces $\Omega X$ et $LX$ apparaissent comme espace totaux ou fibres de fibrations.

1) La fibration des chemins $\Omega X \to PX \to X$ où $PX := \mathrm{map}_* ([0, 1], X)$.
2) La fibration des lacets libres $\Omega X \to LX \to X$.

Rappelons ici la notion de fibration. Une application continue $p : E \to B$ est une *fibration* si $p$ a la propriété de relèvement des homotopies : pour tout diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & B \end{tikzcd}$$

il existe une homotopie $H : X \times [0,1] \to E$ qui étend $f_0$ et relève $G$. Si $B$ est connexe par arcs, $p$ est surjectif et on appelle *fibre* de $p$, notée $F$, $p^{-1}(b)$ où $b \in B$. On démontre facilement que le type d'homotopie de $F$ ne dépend pas du point $b$ choisi.

Les fibrés localement triviaux de base $B$ paracompacte sont des exemples de fibrations que l'on rencontre couramment en géométrie.

Pour toute application continue $f : X \to B$, il existe une fibration $p : E \twoheadrightarrow B$, appelée *fibration associée* à $f$, telle que $f$ se factorise en une équivalence d'homotopie $X \xrightarrow{\simeq} E$ suivie de $p$. La fibre de la fibration associée à $f$ est par définition la *fibre homotopique* de $f$. La fibration associée à $* \to B$ est la fibration des chemins $PB \twoheadrightarrow B$ de fibre l'espace des lacets pointés $\Omega B$.

Soit $f : E \to B$ une fibration de fibre $F$. Une question fondamentale est de savoir quelles sont les données algébriques sur $f$ qui, à la fois, déterminent et permettent de calculer la cohomologie de la fibre à coefficients dans un corps $\Bbbk$, notée $H^*(F; \Bbbk)$. Ce problème classique a été résolu en ce qui concerne la structure d'espace vectoriel par S. Eilenberg et J. Moore avec l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H^*(F) \cong \operatorname{Tor}^{S^*(B)}(S^*(E), \Bbbk).$$

Ici $S^*(B)$ et $S^*(E)$ désigne l'algèbre des cochaînes singulières sur $B$ et sur $E$. Par contre, nous ne savons toujours pas comment calculer $H^*(F)$ comme algèbre. Habituellement, on utilise la suite spectrale d'Eilenberg-Moore avec toute sa structure algébrique, mais cela n'est pas suffisant en général. Remarquons que la formule d'Eilenberg-Moore donne en fait un isomorphisme d'algèbres entre $H^*(F)$ et $\operatorname{Tor}^{S^*(B)}(S^*(E), \Bbbk)$. Mais la structure d'algèbre sur $\operatorname{Tor}^{S^*(B)}(S^*(E), \Bbbk)$ n'est pas définie uniquement à partir des algèbres $S^*(B)$ et $S^*(E)$. Donc en remplaçant à quasi-isomorphismes d'algèbres différentielles graduées près, on ne peux pas calculer l'algèbre $H^*(F)$.

Sur un corps de caractéristique 0, Sullivan [50] a démontré que pour tout espace topologique simplement connexe $X$, $S^*(X)$ est relié naturellement à une algèbre différentielle graduée commutative $A_{PL}(X)$ par des quasi-isomorphismes d'algèbres différentielles graduées. Donc en remplaçant $S^*(B)$ et $S^*(E)$ par $A_{PL}(B)$ et $A_{PL}(E)$ dans la formule d'Eilenberg-Moore, on obtient

$$H^*(F) \cong \mathrm{Tor}^{A_{PL}(B)}(A_{PL}(E), \mathbb{k}) \text{ comme espaces vectoriels.}$$

Comme les algèbres $A_{PL}(B)$ et $A_{PL}(E)$ sont commutatives, $\mathrm{Tor}^{A_{PL}(B)}(A_{PL}(E), \mathbb{k})$ a maintenant une structure naturelle d'algèbre. Un théorème fondamental de l'homotopie rationnelle démontré par Grivel-Thomas-Halperin [28], appelé théorème du modèle de la fibre, nous dit que cette structure coïncide avec celle de $H^*(F)$. En remplaçant $A_{PL}(B)$ et $A_{PL}(E)$ par des modèles de Sullivan, ce théorème permet de calculer l'algèbre $H^*(F)$.

Sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique $p$, étendant le résultat de Sullivan, D. Anick [1] a démontré que si $X$ est un CW-complexe fini $r$-connexe de dimension $\leq rp$ (Nous disons que $X$ est dans le *domaine d'Anick.*), $S^*(X)$ est relié encore à une algèbre commutative $A(X)$ que nous appellerons le *modèle d'Anick de X*. Ce résultat permet de prendre en compte une partie de la torsion dans la cohomologie entière, alors que la théorie de Sullivan ne s'intéressait qu'à la partie libre de la cohomologie. Une question naturelle était donc de généraliser le théorème du modèle de la fibre et c'est le résultat principal de notre premier article :

**Théorème 1** *[45, Theorem A] Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif de caractéristique $p$ impaire. Soit $f : E \hookrightarrow B$ une inclusion de CW-complexes $r$-connexes de dimension $\leq rp$. Soient $A(E)$ and $A(B)$ leurs modèles d'Anick respectifs. Si $F$ est la fibre homotopique de $f$ alors*

$$H^*(F; \mathbb{k}) \cong Tor^{A(B)}(A(E), \mathbb{k}) \textit{comme algèbres graduées.}$$

Anick avait développé sa théorie pour prouver le résultat suivant, suggéré par McGibbon et Wilkerson [41] : Si $X$ est un CW-complexe fini simplement connexe et $p$ un entier premier suffisamment grand, alors les $p$-ièmes puissances sont nulles dans la cohomologie de l'espace des lacets sur $X$, notée $H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p)$. Précisément, Anick a prouvé le résultat suivant : si $X$ est dans le domaine d'Anick, alors les $p$-ièmes puissances sont nulles dans $H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p)$. Poursuivant les travaux d'Anick, Halperin [29] a démontré que si $X$ est dans le domaine d'Anick, $H^*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre libre à puissances divisées. Ma généralisation du théorème du modèle de la fibre me permet d'obtenir la version relative suivante des résultats d'Anick et de Halperin :

**Théorème 2** *[45, Theorem B] Soit $f : E \to B$ une fibration de fibre $F$ telle que $E$ et $B$ soient $r$-connexes, d'homologie de type fini et et n'ayant pas d'homologie en degrés strictement supérieurs à $rp$. Si $f$ est injective en homologie en degré $rp$ alors l'algèbre de cohomologie $H^*(F;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre à puissances divisées (généralement pas libre). En particulier, les $p$-ièmes puissances s'annulent dans $H^*(F;\mathbb{F}_p)$.*

**Deuxième Article : P-th powers in mod p cohomology of fibers [46]**

La cohomologie $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ d'un espace topologique $X$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ est un module sur une algèbre graduée $\mathcal{A}_p$ appelée algèbre de Steenrod. La $n$-ième opération de Steenrod d'un élément de degré $2n$ est sa $p$-ième puissance. En utilisant les opérations de Steenrod dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, dans [46], je redémontre de manière particulièrement rapide, l'annulation des $p$-ièmes puissances dans $H^*(F;\mathbb{F}_p)$.

**Théorème 3** *[46, Corollaire du Théorème A ou du Théorème C] Soient $r,k \in \mathbb{N}^*$. Considérons une fibration $F \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ dont la base $B$ est un CW-complexe fini $r$-connexe de dimension $\leq rp^k$, et dont l'espace total $E$ est un CW-complexe fini $r-1$-connexe de dimension $\leq rp^k-1$. Si $\alpha \in H^+(F;\mathbb{F}_p)$ alors $\alpha^{p^k}=0$.*

Nous montrons un théorème analogue pour les lacets libres.

**Théorème 4** *[46, Théorème B] Soit $r,k \in \mathbb{N}^*$. Soit $B$ un espace simplement connexe dont l'homologie $H_*(B;\mathbb{F}_p)$ est concentré en degrees $i \in [r+1, rp^k]$ et est de dimension finie alors toutes les puissances $p^k$-èmes s'annulent dans $H^+(LB;\mathbb{F}_p)$.*

Remarquons par contre que les techniques de suites spectrales ne permettent pas de retrouver le Théorème 1.

**Troisième Article : The cohomology ring of free loop spaces [44]**

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore et le théorème rationnel du modèle de la fibre ne s'appliquent pas seulement à la fibre d'une fibration, mais plus généralement à un produit fibré comportant au moins une fibration. Les théorèmes 1 et 2 s'étendent aux produits fibrés.

Un espace fonctionnel très intéressant qui s'obtient par produit fibré est l'espace des lacets libres. Les lacets libres sur l'espace topologique $X$, noté $LX$, s'obtiennent par le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{map}([0,1], X) \arrow[d, "ev"] \\ X \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

où $\Delta$ est l'application diagonale et $ev$ est l'évaluation des chemins libres $\mathrm{map}([0,1], X)$ sur leurs deux extrémités.

L'homologie des lacets libres $H_*(LX)$ est reliée à l'homologie de Hochschild. Soit $A$ une algèbre et $B$ un $A$-bimodule. Par définition, l'homologie de Hochschild à coefficients dans $B$, notée $HH_*(A, B)$, est égale à $\mathrm{Tor}^{A \otimes A^{op}}(A, B)$. Si $A$ est une algèbre commutative, l'homologie de Hochschild à coefficients dans $A$, $HH_*(A, A)$, est naturellement une algèbre grâce au shuffle produit. La cohomologie de Hochschild à coefficients dans $B$, notée $HH^*(A, B)$ est égale à $\mathrm{Ext}^{A \otimes A^{op}}(A, B)$. Rappelons aussi que d'après Cartan et Eilenberg, si $A$ est une algèbre de Hopf, i. e. équipée d'une diagonale $A \to A \otimes A$ alors la cohomologie de Hochschild à coefficients dans $A^\vee = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{k})$, notée $HH^*(A, A^\vee)$ est équipée d'un cup produit.

En 1985, Goodwillie [26], Burghelea et Fiedorowicz [4] ont montré l'existence d'un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H^p(LX) \cong HH^p(S_*(\Omega X); S_*(\Omega X)^\vee)$$

En 1987, Jones [32] a montré une formule duale :

$$H^p(LX) \cong HH_{-p}(S^*(X); S^*(X))$$

en tant qu'espaces vectoriels. Chacun de ces deux isomorphismes permet le calcul de la structure d'espace vectoriel de $H^*(LX)$.

Dans mon troisième article [44], je montre que l'isomorphisme de Goodwillie, Burghelea et Fiedorowiscz préserve les cup produits :

**Théorème 5** *[44, Theorem A] Si $X$ est un espace topologique connexe par arcs, l'isomorphisme d'espaces vectoriels de Goodwillie [26], Burghelea et Fiedorowicz [4]*

$$H^*(LX) \cong HH^*(S_*(\Omega X); S_*(\Omega X)^\vee)$$

*est en fait un isomorphisme d'algèbres.*

Ceci me permet le calcul de la structure d'algèbre sur $H^*(LX)$ dans de nombreux cas. Par exemple, quand $X$ est la suspension $\Sigma Y$ d'un espace $Y$, je montre que l'algèbre $H^*(LX)$ dépend fonctoriellement de l'algèbre $H^*(Y)$ [44, Theorem D]. Quand $X$ est $\mathbb{CP}^n$, l'espace projectif complexe de dimension $n$, je calcule explicitement l'algèbre [44, Theorem E et p. 220]

$$H^*(L\mathbb{CP}^n) \cong HH_*(H^*(\mathbb{CP}^n), H^*(\mathbb{CP}^n)).$$

Le résultat suivant qui est l'analogue du Théorème 1 pour les lacets libres, généralise aussi un théorème classique de l'homotopie rationnelle démontré par [54] et [27] :

**Théorème 6** *([12],[44, Theorem F]) Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif de caractéristique $p$ impaire. Soit $X$ un espace dans le domaine d'Anick et $A(X)$ son modèle d'Anick. Alors*

$$H^*(LX; \mathbb{k}) \cong HH_*(A(X), A(X)) \text{ comme algèbres graduées.}$$

# 3 Topologie des cordes (String Topology)

En Physique théorique, un élément de $LX$, un lacet libre est appelé une corde fermée. En théorie des cordes, une particule n'est plus considérée comme ponctuelle mais est modélisée par une corde (ouverte ou fermé). L'évolution d'une corde (fermé) dans l'espace au cours d'un intervalle de temps donne une surface de Riemann à bord. Par exemple, la fusion de deux particules ou le scindage d'une particule correspond au pantalon selon l'orientation donnée.

Soit $M$ une variété lisse connexe fermé (compact sans bord) orienté de dimension $d$. Considérons l'application diagonale $\Delta : M \to M \otimes M$. Comme $\Delta$ est un plongement entre variétés de codimension $d$, $\Delta$ définit une application de Gysin en homologie : $\Delta_! : H_n(M) \to H_{n-d}(M)$. Le produit d'intersection est le composé

$$H_p(M) \otimes H_q(M) \to H_{p+q}(M) \stackrel{\Delta_!}{\to} H_{p+q-d}(M).$$

Equipé du produit d'intersection, l'homologie de $M$ desuspendue $d$-fois, $\mathbb{H}_*(M) := H_{*+d}(M)$, devient une algèbre (graduée) commutative.

En mélangeant ce produit d'intersection et le produit de Pontryagin sur $H_*(\Omega M)$, Chas et Sullivan [5] ont défini un produit commutatif sur l'homologie de l'espace des lacets libres desuspendue $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$. Plus généralement, ils montrent que $\mathbb{H}_*(LM)$ équippé de ce produit et d'un opérateur différentiel de degré $+1$, est une algèbre de Batalin-Vilkovkisky. Les physiciens Batalin et Vilkovisky ont été les premiers à mettre en évidence, dans la théorie des champs de jauges, cette nouvelle structure algébrique.

L'étude de l'homologie des lacets libres a eu un nouvel essor avec cet article de Chas et Sullivan 'String topology'[5]. Il suscite beaucoup d'intêret. Plus concrétement, la théorie topologique des cordes a déjà été développé dans un certain nombre de papiers, parmi lesquels ceux de Chas [6], Cohen, Jones et Yan [8, 9], ceux de Félix, Thomas et Vigué [16, 18, 19, 17], Voronov [55]. Le lecteur intéréssé pourra consulter le préprint [49] de Sullivan pour une plus grande bibliographie (mais qui reste néanmoins incomplète).

**Quatrième Article : Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology [15]**

Soit $M$ une variété compacte lisse simplement connexe de dimension $d$. Chas et Sullivan ont démontré que l'homologie des lacets libres sur $M$, $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$, était munie d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber (à un décalage de degré près, cela veut dire d'algèbre de Poisson graduée).

La cohomologie de Hochschild d'une algèbre $A$, notée $HH^*(A,A)$ est aussi une algèbre de Gerstenhaber [21]. Ces deux structures sont reliées. En effet, Cohen, Jones [8] puis Merkulev [48], Félix, Thomas et Vigué [19] en caractéristique 0, ont démontré qu'il existait un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{H}_p(LM) \cong HH^{-p}(S^*(M), S^*(M))$$

entre l'homologie des lacets libres et la cohomologie de Hochschild de l'algèbre des cochaînes singulières de $M$, $S^*(M)$ (ou des formes extérieures sur $M$).

De nombreux topologues algébristes cherchent actuellement à démontrer que cet isomorphisme d'algèbres est un isomorphisme d'algèbres de Gerstenhaber.

En collaboration avec Félix et Thomas, je montre que, sur un corps commutatif,

-la structure d'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild est invariante par quasi-isomorphismes [15] (aussi démontré par Keller [36]) et que

-la cohomologie de Hochschild possede une certaine dualité :

**Théorème 7** *[15] Soit $X$ un espace topologique simplement connexe (pas forcément une variété) telle que $H_*(X)$ est de dimension finie en chaque degrée. Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres de Gerstenhaber*

$$HH^*(S^*(X), S^*(X)) \cong HH^*(S_*(\Omega X), S_*(\Omega X))$$

*où $S_*(\Omega X)$ désigne les chaînes sur l'espace des lacets pointés de $X$.*

Comme l'explique Hu [31], cet isomorphisme est lié au fait que l'opérade des algèbres associatives soit égale à son opérade duale au sens de Koszul. Remarquons que Keller a démontré indépendamment un isomorphisme similaire [35, (3.5.1)].

**Cinquième Article : Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras [47]**

Par rotation, les lacets libres sont munis d'une action du cercle $S^1$. Chas et Sullivan ont montré que cette action de $S^1$ mélangée à la structure d'algèbre de Gerstenhaber munit $\mathbb{H}_*(LM)$ d'une structure plus riche d'algèbre de Batalin-Vilkovisky. En général, la cohomologie de Hochschild d'une algèbre n'est qu'une algèbre de Gerstenhaber. Néanmoins

**Théorème 8** *([52] ou [47, Theorem 1.6]) Soit $A$ une algèbre symétrique : c'est-à-dire une algèbre telle que $A \cong A^\vee$ comme $A$-bimodule. La structure d'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild $HH^*(A, A)$ s'étend en une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Ce théorème apparait implicitement dans un article de Tradler [52] et explicitement pour la première fois dans mon article [47]. Après, ce théorème a été redémontré et étendu par beaucoup de gens [33, 53, 11, 34, 37, 30, 13, 42] (par ordre chronologique). Dans [42], j'en donne une deuxième preuve.

Chas et Sullivan montrent aussi que l'homologie $S^1$-équivariante de $LM$, $H_*^{S^1}(LM)$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie (en fait mieux, de $L_\infty$-algèbres). Jones [32] a démontré un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$H^p_{S^1}(LM) \cong HC^-_{-p}(S^*(M), S^*(M)).$$

Ici $HC_*^-$ désigne l'homologie cyclique négative. Dans [47, Corollary 1.7], je montre que le dual de l'homologie cyclique négative $HC_*^-(A)$ d'une algèbre symmetrique est muni d'un crochet de Lie.

Gerstenhaber, Schack, Voronov [22, 23], Mc Clure et Smith [40] ont montré que de manière générale, pour obtenir une structure d'algèbre de Gerstenhaber, il suffit d'avoir ce qu'ils appellent une opérade "avec multiplication". Dans [47, Theorem 1.4], je montre que de manière analogue pour obtenir une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky, il suffit d'avoir ce que j'appelle une opérade cyclique "avec multiplication". C'est ce résultat général qui m'a permis de démontrer que la cohomologie de Hochschild d'une algèbre symétrique $HH^*(A,A)$ était munie d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky. Ce résultat général a une deuxième application inattendue dans la théorie des cohomologies cycliques des algèbres de Hopf développée par Connes et Moscovici [10] :

**Théorème 9** *[47, Theorem 1.1] Si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf avec antipode involutive alors $Ext_{\mathcal{H}}^*(\mathbb{k},\mathbb{k})$ est muni d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky et le dual de l'homologie cyclique négative de $\mathcal{H}$, $HC_*^-(\mathcal{H})$, définie par Connes et Moscovici [10] possède un crochet de Lie.*

**Sixième Article : String Topology for spheres [43]**

Peu de calculs de l'algèbre de Batalin-Vilkovisky $\mathbb{H}_*(LM)$, introduite par Chas et Sullivan, ont été fait. Dans cet article, je calcule explicitement cette structure quand $M$ est une sphere $S^d$ pour $d \geq 1$.

La dualité de Poincaré donne un isomorphisme de $H^*(M)$-modules de degrée $-d$ (en haut)

$$H^p(M) \stackrel{\cong}{\to} H^{d-p}(M)^\vee.$$

Comme l'algèbre $H^*(M)$ est commutative, la dualité de Poincaré donne donc une structure d'algèbre symétrique sur la cohomologie de la variété $M$, $H^*(M)$. D'après le Théorème 8 cité dans l'article précédent, l'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(H^*(M),H^*(M))$ est une algèbre de de Batalin-Vilkovisky. Dans ce sixième article, nos calculs montrent que de manière surprenante, les algèbres de Batalin-Vilkovisky $\mathbb{H}_*(LS^2;\mathbb{F}_2)$ et $HH^*(H^*(S^2),H^*(S^2))$ ne sont pas isomorphes, bien que comme prévu, les algèbres de Gerstenhaber sous-jacentes soit néanmoins isomorphes.

**Septième Article : Batalin-Vilkovisky algebras and the J-homomorphism [20]**

Getzler [24] a montré que l'homologie des lacets pointés doubles d'un espace topologique $X$, $H_*(\Omega^2 X)$, était aussi munie d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Avec Gérald Gaudens, dans cet article, nous calculons l'algèbre de Batalin-Vilkovisky à coefficients rationnels $H_*(\Omega^2 X;\mathbb{Q})$ quand $X$ est est un espace topologique 2-connexe (Théorème 4.4).

Nous montrons que l'opérateur différentiel de degree $+1$, $BV : H_*(\Omega^2 X;\mathbb{F}) \rightarrow H_{*+1}(\Omega^2 X;\mathbb{F})$ est nul pour les élément sphériques (i. e. qui sont dans l'image du morphisme de Hurewicz) lorsqu'on considère un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de deux (Corollaire 5.7 ii)). Sur le corps premier $\mathbb{F}_2$ de caractéristique 2, au contraire l'opérateur differentiel de degree $+1$, $BV$ : $H_1(\Omega^2 S^3;\mathbb{F}_2) \overset{\cong}{\rightarrow} H_2(\Omega^2 S^3;\mathbb{F}_2)$ n'est pas nul (Théorème 6.2).

Ce dernier résultat est utilisé dans mon article précédent [43] pour calculer l'algèbre de Batalin-Vilkovisky $\mathbb{H}_*(LS^2;\mathbb{F}_2)$. Dans l'appendice de [43], Gérald Gaudens et moi en donnons une deuxième preuve indépendante.

**Huitième Article : Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology [42]**

Soit $M$ une variété lisse compacte simplement connexe de dimension $d$. Soit $\mathbb{F}$ un corps commutatif. Félix, Thomas et Vigué-Poirrier [18, Appendix] ont montré qu'il existe un isomorphisme de degree $d$

$$HH^p(S^*(M), S^*(M)) \overset{\cong}{\rightarrow} HH^{p-d}(S^*(M), S_*(M)).$$

Ginzburg a montré que pour certaines algèbres $A$, appelées algèbre de Calabi-Yau, l'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild $HH^*(A;A)$ s'étend en une algèbre de Batalin-Vilkovisky.

En génèralisant la méthode de Ginzburg, je montre que l'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(S^*(M), S^*(M))$ s'étend en une algèbre de Batalin-Vilkovisky [42, Theorem 21].

Plus génèralement dans cet article, je montre que

**Théorème 10** *Si une algèbre differentielle graduée $A$ est "symétrique à homotopie pres" alors*

*1) il existe un isomorphisme [42, Proposition 10]*

$$HH^p(A, A) \overset{\cong}{\rightarrow} HH^{p-d}(A, A^\vee).$$

*et*

*2) l'algèbre de Gerstenhaber $HH^*(A,A)$ devient une algèbre de Batalin-Vilkovisky [42, Proposition 11].*

Ce théorème s'applique quand $A = S^*(M)$, l'algèbre des cochaines singulières sur $M$. Il s'applique évidemment quand $A$ est une algèbre symetrique [42, Corollary 18]. Ce qui redémontre le théorème 8.

**Neuvième Article : String topology of classifying spaces** [7] Dans ce dernier article, David Chataur et moi montrons le théorème suivant :

**Théorème 11** *Soit $G$ un groupe fini ou un groupe de Lie compact connexe. L'homologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, $H_*(LBG)$ est une théorie homologique des champs conforme à bords non vides.*

Comme le dual d'une théorie homologique des champs conforme de dimension fini en chaque degrée est encore une théorie homologique des champs conforme.

**Théorème 12** *Soit $G$ un groupe fini ou un groupe de Lie compact connexe. La cohomologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, $H^*(LBG)$ est une théorie homologique des champs conforme à bords non vides.*

J'explique tout d'abord ce qu'est une théorie homologique des champs conforme.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie des 2-cobordismes complexes introduite par Segal. Par définition, un objet de $\mathfrak{M}$ est une variété fermée de dimension 1, c'est à dire une réunion disjointe d'un certain nombre de cercles $\amalg_{i=1}^{n} S^1$, $n \in \mathbb{N}$. Les objets de $\mathfrak{M}$ forment donc un ensemble que l'on identifie à $\mathbb{N}$. Soient $p$, $q \in \mathbb{N}$ deux objets de $\mathfrak{M}$. Par définition, un morphisme de $p$ vers $q$ est une classe d'isomorphisme de cobordismes complexes de $p$ cercles vers $q$ cercles. Je me limite aux cobordismes dont chaque composante connexe comprend au moins une composante de bord entrante et au moins une composante de bord sortante. Mes théorie homologique des champs conforme sont donc qualifiées de *à bords non vides* (en anglais *positive boundary*). L'ensemble des morphismes de $p$ vers $q$, noté $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(p,q)$, est muni d'une topologie. En collant les cobordismes, $\mathfrak{M}$ devient une catégorie topologique. La réunion disjointe des cercles et des cobordismes donne une structure monoidale symétrique sur $\mathfrak{M}$.

Soit $H_*(\mathfrak{M})$ la catégorie linéaire qui a les mêmes objets que $\mathfrak{M}$ et telle que, pour les morphismes

$$\mathrm{Hom}_{H_*(\mathfrak{M})}(p,q) = H_*(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(p,q)).$$

Une *théorie homologique des champs conforme* (en anglais *homological conformal field theory*) est un espace vectoriel gradué $V$ équippé d'un foncteur linéaire $F$ monoidale symétrique de la catégorie $H_*(\mathfrak{M})$ vers la catégorie des espaces vectoriels gradués telle que $F(1) = V$.

En se limitant aux cobordismes connexes de genre zéro avec une seule composante de bord sortante, on obtient que toute théorie homologique des champs conforme $V$ est munie d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky [24]. Nous obtenons donc le corollaire suivante de notre théorème

**Corollary 13** *Soit $G$ un groupe fini ou un groupe de Lie compact connexe de dimension $d$. La cohomologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, suspendue $\mathbb{H}^*(LBG) := H^{*+d}(LBG)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Ce corollaire est en quelque sorte le dual du théorème de Chas-Sullivan

**Théorème 14** *[5] Soit $M$ une variété lisse connexe fermé orienté de dimension $d$. L'homologie de l'espace des lacets libres desuspendue $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Notons que récemment Godin a montré que $H_*(LM)$ était aussi une théorie homologique des champs conforme à bords non vides [25].

Soit $G$ un groupe fini ou un groupe de Lie compact connexe de dimension $d$. Dans cet article, avec David Chataur, nous montrons aussi que le théorème 10 s'applique quand $A = S_*(G)$, les chaines singulières sur $G$. Nous obtenons donc un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$HH^{*+d}(S_*(G), S^*(G)) \cong HH^*(S_*(G), S_*(G)).$$

et une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur la cohomologie de Hochschild $HH^*(S_*(G), S_*(G))$. Goodwillie [26], Burghelea et Fiedorowicz [4] ont montré l'existence d'un isomorphisme d'espaces vectoriels entre la cohomologie sur les lacets libres sur le classifiant de $G$ et la cohomologie de Hochschild

$$H^*(LBG) \cong HH^*(S_*(G); S^*(G)).$$

**Question.** Cet isomorphisme entre $\mathbb{H}^*(LBG)$ et $HH^*(S_*(G), S_*(G))$ est-il un isomorphisme d'algèbres de Batalin-Vilkovisky ?

# Références


[1] D. J. Anick, *Hopf algebras up to homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 3, 417–453.

[2] J.M. Boardman and R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces.*, Lecture Notes in Mathematics. 347. Springer-Verlag., 1973.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chap. 5 à 10.*, Paris : Hermann., 1974.

[4] D. Burghelea and Z. Fiedorowicz, *Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces. II*, Topology **25** (1986), no. 3, 303–317.

[5] M. Chas and D. Sullivan, *String topology*, preprint : math.GT/991159, 1999.

[6] Moira Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces.*, Topology **43** (2004), no. 3, 543–568.

[7] D. Chataur and L. Menichi, *String topology of classifying spaces*, preprint : math.AT/0801.0174v2, 2008.

[8] R. Cohen and J. Jones, *A homotopic theoretic realization of string topology*, Math. Ann. **324** (2002), no. 4, 773–798.

[9] R. Cohen, J. Jones, and J. Yan, *The loop homology algebra of spheres and projective spaces*, Categorical decomposition techniques in algebraic topology, (Isle of Skye 2001), Prog. Math., vol. 215, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 77–92.

[10] A. Connes and H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), no. 1, 199–246.

[11] K. Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 165–214.

[12] N. Dupont and K. Hess, *Hochschild cohomology is topological*, J. Pure Appl. Algebra **165** (2003), no. 1, 1–6.

[13] C.-H. Eu and T. Schedler, *Calabi-Yau Frobenius algebras*, preprint : arXiv :0710.3391v1, 2007.

[14] Herbert Federer, *A study of function spaces by spectral sequences.*, Trans. Am. Math. Soc. **82** (1956), 340–361.

[15] Y. Félix, L. Menichi, and J.-C. Thomas, *Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **199** (2005), no. 1-3, 43–59.

[16] Y. Félix and J.-C. Thomas, *Monoid of self-equivalences and free loop spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 1, 305–312.

[17] ———, *Rational BV-algebra in string topology*, preprint : arXiv :0705.4194, 2007.

[18] Y. Félix, J.-C. Thomas, and M. Vigué-Poirrier, *The Hochschild cohomology of a closed manifold*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2004), no. 99, 235–252.

[19] ———, *Rational string topology*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **9** (2005), no. 1, 123–156.

[20] G. Gaudens and L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebras and the J-homomorphism*, preprint : arXiv :0707.3103, 2007.

[21] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. **78** (1963), no. 2, 267–288.

[22] M. Gerstenhaber and S. Schack, *Algebras, bialgebras, quantum groups, and algebraic deformation*, Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics (Amherst, MA, 1990), Contemp. Math., vol. 134, Amer. Math. Soc., 1992, pp. 51–92.

[23] M. Gerstenhaber and A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153.

[24] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), no. 2, 265–285.

[25] V. Godin, *Higher string topology operations*, preprint : math.AT/0711.4859, 2007.

[26] T. G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loopspace*, Topology **24** (1985), no. 2, 187–215.

[27] Karsten Grove, Stephen Halperin, and Micheline Vigue-Poirrier, *The rational homotopy theory of certain path spaces with applications to geodesics.*, Acta Math. **140** (1978), 277–303.

[28] S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Soc. Math. France **9-10** (1983).

[29] ———, *Universal enveloping algebras and loop space homology*, J. Pure Appl. Algebra **83** (1992), 237–282.

[30] P. Hu, *The Hochschild cohomology of a Poincaré algebra*, preprint : arXiv :0707.4118v1, 2007.

[31] Po Hu, *Higher string topology on general spaces.*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **93** (2006), no. 2, 515–544.

[32] J. D. S. Jones, *Cyclic homology and equivariant homology*, Invent. Math. **87** (1987), no. 2, 403–423.

[33] R. Kaufmann, *A proof of a cyclic version of Deligne's conjecture via Cacti*, preprint : math.QA/0403340, 2004.

[34] ______, *Moduli space actions on the Hochschild co-chains of a Frobenius algebra I :Cells operads*, J. Noncommut. Geom. **1** (2007), no. 3, 333–384.

[35] B. Keller, *Derived invariance of higher structures on the hochschild complex*, preprint www.math.jussieu.fr/ keller, 2003.

[36] Bernhard Keller, *Hochschild cohomology and derived Picard groups.*, J. Pure Appl. Algebra **190** (2004), no. 1-3, 177–196.

[37] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry. I*, preprint : math.RA/0606241, 2006.

[38] Jean Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire. (appendice par michel zisman)*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **75** (1992), 135–244.

[39] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 271, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[40] J. McClure and J. Smith, *A solution of Deligne's hochschild cohomology conjecture*, Contemp. Math., vol. 293, pp. 153–193, Amer. Math. Soc., 2002.

[41] C. A. McGibbon and C. W. Wilkerson, *Loop spaces of finite complexes at large primes*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 698–702.

[42] L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology*, preprint : math.QA/0711.1946.

[43] ______, *String topology for spheres*, preprint : math.AT/0609304, to appear in Comment. Math. Helv.

[44] ______, *The cohomology ring of free loop spaces*, Homology Homotopy Appl. **3** (2001), no. 1, 193–224.

[45] ———, *On the cohomology algebra of a fiber*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 719–742.

[46] ———, *P-th powers in mod p cohomology of fibers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 6, 537–540.

[47] ———, *Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras*, $K$-Theory **32** (2004), no. 3, 231–251.

[48] S. Merkulov, *De Rham model for string topology*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 55, 2955–2981.

[49] D. Sullivan, *String topology : Background and present state*, preprint : math.GT/0710.4141.

[50] ———, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **47** (1977), 269–331.

[51] René Thom, *L'homologie des espaces fonctionnels.*, Colloque de Topologie Algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 29-39 (1957)., 1957.

[52] T. Tradler, *The BV algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products*, preprint : math.QA/0210150v1, 2002.

[53] T. Tradler and M. Zeinalian, *On the cyclic Deligne conjecture*, J. Pure Appl. Algebra **204** (2006), no. 2, 280–299.

[54] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan, *The homology theory of the closed geodesic problem*, J. Differential Geometry **11** (1976), no. 4, 633–644.

[55] Alexander A. Voronov, *Notes on universal algebra.*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics. Proceedings of the conference dedicated to Dennis Sullivan's 60th birthday, June 14–21, 2001. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 73, 81-103 (2005)., 2005.

# Résumé

Soit $F_{g,p+q}$ une surface orientée (pas forcément connexe par arcs) de genre $g$ avec $p$ composantes de bord entrantes et $q$ composantes de bord sortantes. Soit $\chi(F_{g,p+q})$ sa caractéristique d'Euler. Soit $Diff^+(F_{g,p+q},\partial)$ le groupe des difféomorphismes de $F_{g,p+q}$ préservant l'orientation et fixant les composantes de bord points par points. Soit $G$ un groupe fini ou un groupe de Lie compact connexe de dimension $d$. Notons par $BG$ l'espace classifiant de $G$. Considérons l'espace, $\mathcal{L}BG := cont(S^1, BG)$ des lacets libres sur $BG$ : c'est l'espace des applications continues du cercle $S^1$ dans $BG$. Nous construisant des opérations de degré $-d\chi(F_{g,p+q})$

$$H_*(BDiff^+(F_{g,p+q},\partial)) \otimes H_*(\mathcal{L}BG)^{\otimes p} \longrightarrow H_*(\mathcal{L}BG)^{\otimes q}$$

vérifiant certaines propriétés d'associavité et d'équivariance. L'homologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, $H_*(\mathcal{L}BG)$ est donc une théorie homologique des champs conforme (à bords non vides). En dualisant, la cohomologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, $H^*(\mathcal{L}BG)$ est encore une théorie homologique des champs conforme (à bords non vides).

En se limitant aux cobordismes connexes de genre zéro avec une seule composante de bord sortante, nous obtenons que la cohomologie des lacets libres sur le classifiant de $G$, suspendue $\mathbb{H}^*(\mathcal{L}BG) := H^{*+d}(\mathcal{L}BG)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Ce corollaire est en quelque sorte le dual du célèbre résultat de Chas et Sullivan : Soit $M$ une variété lisse simplement connexe fermé orienté de dimension $d$. L'homologie de l'espace des lacets libres desuspendue $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) := H_{*+d}(\mathcal{L}M)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky. Notons que récemment Godin a montré que $H_*(\mathcal{L}M)$ est aussi une théorie homologique des champs conforme (à bords non vides).

Soit $A$ une algèbre différentielle graduée. Soit $B$ un $(A,A)$-bimodule. Notons par $HH^*(A,B)$ la cohomologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $B$. La cohomologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $A$, $HH^*(A,A)$ est une algèbre de Gerstenhaber. Une algèbre est dite *symétrique* si elle est equipée d'un isomorphisme de $(A,A)$-bimodules de $A$ vers son dual $A^\vee$. Nous montrons que si $A$ est une algèbre symétrique ou plus génèralement une algèbre "symétrique à homotopie prés" alors

-il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels graduées

$$HH^*(A,A) \cong HH^*(A,A^\vee),$$

-la structure d'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild $HH^*(A, A)$ s'étend en une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Comme les cochaînes singulières sur $M$ notées $S^*(M)$ ou les chaînes singulières sur $G$ notées $S_*(G)$ forment une algèbre symétrique à homotopie près, nous obtenons les deux isomorphismes d'espaces vectoriels graduées

$$\mathbb{H}_p(\mathcal{L}M) \cong HH^{-p-d}(S^*(M), S_*(M) \cong HH^{-p}(S^*(M), S^*(M)),$$

$$\mathbb{H}^p(\mathcal{L}BG) \cong HH^{p+d}(S_*(G), S^*(G)) \cong HH^p(S_*(G), S_*(G)).$$

et deux structures d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur les cohomologies de Hochschild $HH^*(S^*(M), S^*(M))$ et $HH^*(S_*(G), S_*(G))$.

Nous conjecturons que ces deux isomorphismes d'espaces vectoriels sont en fait des isomorphismes d'algèbres de Batalin-Vilkovisky.